ЛЕКЦИЯ 8А (ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ)

Аннотация. Еще про определители: разложение по строке, правило Крамера и метод Гаусса вычисления определителей.

Все матрицы в этой лекции — квадратные матрицы $n \times n$ с элементами из поля $\mathbb{F}$.

Вначале — два простых свойства определителей. Матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Транспонированной (по отношению к A) называется матрица A^T, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число a_{ji} (стоящее на пересечении j-й строки и i-го столбца в A).

Теорема 1. (1) *Если A — верхнетреугольная матрица, то* $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
(2) $\det A^T = \det A$.

Доказательство обоих утверждений — упражнение (часть листка 7).

Отметим, кстати, что если интерпретировать определитель (для матриц над полем $\mathbb{R}$) как ориентированный объем, то утверждение 2 становится неочевидным даже при $n = 2$ (посмотрите, что оно значит!) — при том, что алгебраическое доказательство этого утверждения очень простое.

Пусть A — матрица $n \times n$, и $1 \le i, j \le n$. Обозначим A_{ij} матрицу, полученную вычеркиванием из A строки номер i и столбца номер j.

Теорема 2 (разложение определителя по строке). *Для всякого $i = 1, \dots, n$ имеет место равенство* $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = (-1)^{i+1}(a_{i1} \det A_{i1} - a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{n-1} a_{in} \det A_{in})$.

Доказательство. Пусть вначале $i = 1$. Каждый член в формуле для определителя содержит ровно один сомножитель вида a_{1k}; приведем подобные члены: $\det A = a_{11}P_1(A) + \dots + a_{1n}P_n(A)$. Как нетрудно видеть, $P_k(A)$ — сумма выражений $\pm a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)}$ по всевозможным биекциям $\tau : \{2, \dots, n\} \to \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$. Формула для $\det A_{1k}$ дает такую же сумму, но, вообще говоря, с другими знаками: знак в каждой из сумм — четность перестановки, но перестановка предполагает, что строки и столбцы матрицы A нумеруются от 1 до n, а строки и столбцы матрицы A_{1k} — от 1 до $n-1$. После надлежащей перенумерации строк и столбцов получаем, что знак при мономе $a_{1k}a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)}$ в $\det A$ равен $\mathrm{sgn}(\sigma_1)$, а в $a_{1k} \det A_{1k}$ — $\mathrm{sgn}(\sigma_2)$, где $\sigma_1 \in S_n$ задана равенством $\sigma_1(i) = \begin{cases} k, & i = 1, \\ \tau(i), & 2 \le i \le n \end{cases}$, а $\sigma_2 \in S_{n-1}$ — равенством $\sigma_2(i) = \begin{cases} \tau(i+1), & \tau(i+1) \le k-1, \\ \tau(i+1) - 1, & \tau(i+1) \ge k+1 \end{cases}$.

Сравним количество беспорядков в перестановках σ_1 и σ_2. Нетрудно заметить (проверьте!), что пара (i, j), где $1 \le i < j \le n-1$, является беспорядком в σ_2 тогда и только тогда, когда $(i+1, j+1)$ — беспорядок в σ_1; таким образом, перечислены все беспорядки в σ_1, в которых оба элемента не меньше 2. Кроме того, в σ_1 могут присутствовать беспорядки вида $(1, j)$; такая пара является беспорядком тогда и только тогда, когда $1 \le \sigma_1(j) < k = \sigma_1(1)$. Поскольку выражение $\sigma_1(j)$ при $j = 2, \dots, n$ принимает по одному разу все значения от 1 до n, кроме k, количество беспорядков вида $(1, j)$ в σ_1 равно $k-1$. Тем самым знаки при одном и том же мономе в двух выражениях отличаются на $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$, что доказывает теорему для $i = 1$.

Для доказательства теоремы при произвольном i рассмотрим матрицу B, полученную из A обменом местами 1-ой и i-ой строки. Поскольку определитель — кососимметрическая функция строк матрицы, $\det B = -\det A$. В то же время матрица B_{1k} получается из матрицы A_{ik} перестановкой по циклу строк с номерами $1, 2, \dots, i-1$. Такая циклическая перестановка равна произведению $i-2$ транспозиций $(12)(23)\dots(i-2, i-1)$ и, следовательно, $\det B_{1j} = (-1)^{i-2} \det A_{ij}$. Окончательно получаем $\det A = -\det B = -\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} b_{1j} \det B_{1j}$ (в силу уже доказанной формулы для $i = 1$) $= -\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}(-1)^{i-2} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$. □

Следствие 1. *Пусть A — матрица $n \times n$, причем $\det A \ne 0$. Матрица B того же размера, у которой для произвольных $i, j = 1, \dots, n$ на пересечении строки i и столбца j стоит число $b_{ij} \stackrel{def}{=} (-1)^{i+j} \det A_{ji} / \det A$, является обратной к A.*

Доказательство. Согласно определению обратной матрицы, нужно доказать равенство $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$, и $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = 0$ для всех $k \ne i$. Первое равенство вытекает из теоремы 2: $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij} / \det A = \det A / \det A = 1$. Из той же теоремы вытекает, что если $k \ne i$, то $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{k+j} \det A_{kj} / \det A$ равно $1/\det A$, умноженному на определитель матрицы A, в которой вместо строки k подставлена строка 1. Но в полученной матрице — две одинаковые строки, так что ее определитель равен нулю. □

Следствие 2 (следствия 1 — формула Крамера)**.** *Пусть* $A = (a_{ij})$ *и* $\det A \neq 0$*, а* $b_1, \dots, b_n$ *— произвольные числа. Тогда решение (единственное) системы* n *линейных уравнений с* n *неизвестными* $x_1, \dots, x_n$ *вида*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

задается равенством $x_k = \det A_k / \det A$*, где матрица* A_k *получена из матрицы* A *заменой ее* k*-го столбца на* $(b_1, \dots, b_n)$*; здесь* $k = 1, \dots, n$*.*

Доказательство. Обозначим $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{F}^n$, тогда система уравнений имеет вид $Ax = b$. Отсюда вытекает, что $x = A^{-1}b$, и с учетом следствия 1 получаем $x_k = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} b_j \det A_{jk}$. С другой стороны, $\det A_k = \det A_k^T$ (по теореме 1) $= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} b_j \det(A_k^T)_{kj}$ (по теореме 2 — разложение по k-й строке) $= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} b_j \det A_{jk}$: в матрице A_k отличается от матрицы A только k-й столбец, а в миноре (подматрице) $(A_k)_{jk}$ он все равно вычеркивается. □

Обозначим P_{ij} отображение (линейное) $\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F}) \to \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$, меняющее в матрице местами i-ю и j-ю строку, а $K_{i,j,\lambda}$ — отображение $\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F}) \to \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$, прибавляющее к j-ой строке матрицы i-ю, умноженную на λ; остальные строки, в том числе i-я, остаются неизменными. Отображения $K_{i,j,\lambda}$ и P_{ij} называют элементарными преобразованиями матриц (первого и второго рода соответственно).

Теорема 3 (метод Гаусса)**.** *Для любой матрицы* A *существует последовательность элементарных преобразований, результат применения которой к* A *— верхнетреугольная матрица.*

Доказательство. Докажем вначале, что существует последовательность элементарных преобразований, результат применения которых к матрице A — матрица C, в которой все элементы первого столбца, кроме, возможно, первого, равны нулю. Если $a_{i1} = 0$ для всех i, то $C = A$ (и первый элемент столбца тоже нулевой). В противном случае пусть $a_{i1} \neq 0$; тогда в матрице $C_1 = P_{1i}(A)$ угловой элемент $c_{11} \neq 0$. Положим $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} -c_{i1}/c_{11}$; тогда в матрице $C_2 = K_{1,i,\lambda}(C_1)$ элемент $c_{i1} = 0$, а элемент c_{11} такой же, как в C_1. Проделав подобную операцию для всех $i = 2, \dots, n$, получим требуемую матрицу C (в этом случае первый элемент столбца ненулевой).

Дальнейшее доказательство — индукция по n. Применение к матрице C элементарных преобразований P_{ij} и $K_{i,j,\lambda}$, где $2 \leq i, j \leq n$, не меняет в матрице C первую строку (очевидно) и первый столбец (потому что он нулевой, кроме первого элемента). С другой стороны, по предположению индукции существует последовательность элементарных преобразований, приводящая минор C_{11} к верхнетреугольному виду (напомним, что C_{11} получается из C вычеркиванием первой строки и первого столбца). Но тогда те же преобразования делают матрицу C верхнетреугольной. □

Метод Гаусса позволяет быстро вычислить определитель матрицы A. По свойствам ориентированного объема $\det P_{ij}(A) = -\det A$ и $\det K_{i,j,\lambda}(A) = \det A$ для всех i, j, λ и произвольной матрицы A. Следовательно, если B — верхнетреугольная матрица, полученная из A элементарными преобразованиями, то $\det B = \pm \det A$, где знак зависит от четности числа примененных элементарных преобразований второго рода. Определитель верхнетреугольной матрицы вычисляется по утверждению 1 теоремы 1.