ЛЕКЦИЯ 9

Аннотация. Проективные пространства и проективные отображения. Нормализатор гиперплоскости в проективной группе.

1. Проективные пространства

Проективное пространство — это
проективизация векторного пространства.
Верлибр.

Проективизацией векторного пространства V (над полем $\mathbb{F}$) называется множество $\mathbb{P}V$, элементами которого являются одномерные подпространства $\ell \subset V$ (т.е. прямые, проходящие через начало координат). Проективным подпространством $Q \subset \mathbb{P}V$ называется проективизация векторного подпространства $W \subset V$: $Q = \mathbb{P}W$. Если пространство V конечномерно, то размерностью проективного пространства $\mathbb{P}V$ называется число $\dim V - 1$.

Пример 1. Пусть $V = \mathbb{F}^{n+1}$ (или просто $\dim V = n+1$, и V отождествляется с $\mathbb{F}^{n+1}$ путем выбора базиса), и пусть $\ell \in \mathbb{P}\mathbb{F}^{n+1}$ (то есть $\ell \subset \mathbb{F}^{n+1}$ — прямая, проходящая через 0). Любой ненулевой вектор $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \ell$ определяет прямую ℓ, которой принадлежит (служит в ней базисом); при этом прямая определяет ненулевой вектор с точностью до умножения на произвольную ненулевую константу. Поэтому пишут $\ell = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$, при этом $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [tx_0 : tx_1 : \dots : tx_n]$ для произвольного $t \ne 0$. Иными словами, $\mathbb{P}\mathbb{F}^{n+1}$ можно представлять себе как фактор множества $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ по "растяжениям": $(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (tx_0, tx_1, \dots, tx_n)$, $\forall t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Часто вместо $\mathbb{P}\mathbb{F}^{n+1}$ пишут $\mathbb{F}P^n$.

Пусть $\mu : V \to \mathbb{F}$ — ненулевой линейный функционал, и $W = \mu^{-1}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \mu(v) = 0\}$ — векторное подпространство. (Такое векторное подпространство — множество нулей линейного функционала — называется гиперплоскостью в V; если V конечномерно, то $W \subset V$ — гиперплоскость тогда и только тогда, когда $\dim W = \dim V - 1$.) Рассмотрим также множество $L = \mu^{-1}(1)$ — аффинное подпространство, параллельное W. Если $\ell \subset V \setminus W$ — прямая, и $v \in \ell$ — ненулевой вектор, то $\mu(v) \ne 0$. Отсюда вытекает, что ℓ пересекает пространство L в единственной точке $v/\mu(v)$; обратно, если $v \in L$, то прямая $\langle v \rangle \subset V \setminus W$. Тем самым мы отождествили разность $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$ с аффинным пространством L, параллельным векторному пространству W.

Пример 1, продолжение. Для всякого $i = 0, \dots, n$ на пространстве $\mathbb{F}^{n+1}$ определен функционал, сопоставляющий вектору его i-ю координату: $\mu_i((x_0, \dots, x_n)) = x_i$. Пусть для определенности $i = 0$; тогда $W = \mu_0^{-1}(0) \subset \mathbb{F}^{n+1}$ состоит из векторов вида $(0, x_1, \dots, x_n)$, а $L = \mu_0^{-1}(1) \subset \mathbb{F}^{n+1}$ — из векторов вида $(1, x_1, \dots, x_n)$. Отображение $\mathbb{F}P^n \setminus \mathbb{P}W \to L$ переводит, как нетрудно убедиться, точку $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$, $x_0 \ne 0$, в точку $(1, x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$.

Есть очевидное отождествление L с $\mathbb{F}^n$ (вычеркиваем единицу в начале вектора). Тем самым получается разложение $\mathbb{F}P^n = \mathbb{F}^n \sqcup \mathbb{F}P^{n-1}$. Если $x_0 \to 0$ (а остальные x_i остаются постоянными; здесь мы предполагаем на секунду, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то $x_i/x_0 \to \infty$; в связи с этим проективную гиперплоскость $\mathbb{P}W = \mathbb{F}P^{n-1} = \{[0 : x_1 : \dots : x_n] \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}\}$ называют бесконечно удаленной.

Разложение $\mathbb{F}P^n = \mathbb{F}^n \sqcup \mathbb{F}P^{n-1}$ можно продолжить: $\mathbb{F}P^n = \mathbb{F}^n \sqcup \mathbb{F}P^{n-1} = \mathbb{F}^n \sqcup \mathbb{F}^{n-1} \sqcup \mathbb{F}P^{n-2} = \mathbb{F}^n \sqcup \mathbb{F}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{F}^1 \sqcup \mathbb{F}P^0$; последнее пространство — точка $[0 : 0 : \dots : 0 : 1]$.

Рассмотрим подробнее проективные пространства малых размерностей.

1.1. **Проективная прямая.**

В простейшем случае $n = 1$ проективное пространство (проективная прямая) $\mathbb{F}P^1 = \mathbb{P}(\mathbb{F}^2) = \{[x_0 : x_1]\}$ состоит из множества $L = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \ne 0\}$ "обыкновенных точек" и единственной "бесконечно удаленной" точки $[0 : 1]$. Множество L находится в естественном взаимно однозначном соответствии с полем $\mathbb{F}$ (которое рассматривается как одномерное аффинное пространство над собой): $[x_0 : x_1] = [1 : x_1/x_0]$, так что точке $[x_0 : x_1]$ сопоставляется ее "координата" x_1/x_0. Бесконечно удаленная точка $[0 : 1]$ (часто обозначаемая ∞) — проективизация прямой $W = \{(0, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{F}\}$.

Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и вектор $v = (x_0, x_1) \in \mathbb{F}^2 \setminus \{(0,0)\}$ стремится к "вертикальному": $x_0 \to 0$, $x_1 \to x_1^* \ne 0$, то содержащая его прямая $[x_0 : x_1]$ стремится к $[0 : x_1^*] = [0 : 1] = \infty \in \mathbb{F}P^1$, что согласуется с обозначением $x_1/x_0 \to \infty$.

Замечание мелким шрифтом для тех, кто знаком с основами топологии. Проективная прямая $\mathbb{F}P^1$ состоит, как показано выше, из обычной прямой $\mathbb{F}$ и дополнительной точки ∞. Пусть $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Наделим проективное пространство $\mathbb{F}P^n$ топологией, взяв ее из пространства $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ (топология факторпространства): окрестностью точки $[x_0 : \dots : x_n]$ проективного пространства является множество точек $[y_0 : \dots : y_n]$, где точка $(y_0, \dots, y_n)$ пробегает некоторую окрестность точки $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$. Из сказанного выше вытекает, что для всякого $R > 0$ множество U_R, состоящее из точки $\infty = [0 : 1] \in \mathbb{F}P^1$ и всех точек $[1 : t]$, где $|t| > R$ ($|\cdot|$ — модуль действительного или комплексного числа), является окрестностью точки ∞; более того, любая окрестность ∞ содержит какую-нибудь U_R (докажите!). Отсюда вытекает (почему?), что вещественная проективная прямая $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ гомеоморфна окружности, а комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\} = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ — двумерной сфере.

1.2. **Проективная плоскость.** Проективная плоскость $\mathbb{F}P^2 = F^2 \sqcup \mathbb{F}P^1$ состоит из “обычных точек”, образующих аффинную плоскость $F^2 = \{[x_0 : x_1 : x_2] = [1 : x_1/x_0 : x_2/x_0]\}$, $x_0 \neq 0$, и бесконечно удаленной проективной прямой $\mathbb{F}P^1 = \{[0 : x_1 : x_2]\}$. Если $W \subset \mathbb{F}^3$ — двумерное подпространство (плоскость, проходящая через начало координат), то его проективизация $\mathbb{P}W \subset \mathbb{F}P^2$ — проективная прямая на проективной плоскости. В частности, бесконечно удаленная прямая — проективизация плоскости $\{(0, x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{F}\} \subset \mathbb{F}^3$.

Если $W_1, W_2 \subset \mathbb{F}^3$ — две несовпадающих плоскости, то линейная оболочка их объединения $\langle W_1 \cup W_2 \rangle = \mathbb{F}^3$. (Действительно, $\langle W_1 \cup W_2 \rangle$ — векторное подпространство, содержащее W_1 и W_2, но не совпадающее с ними — поскольку должно содержать их оба. Значит, $\dim \langle W_1 \cup W_2 \rangle$ больше 2, то есть равна 3.) Тогда $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim \langle W_1 \cup W_2 \rangle = 2 + 2 - 3 = 1$ — плоскости пересекаются по прямой. Значит, любые две несовпадающие проективные прямые на проективной плоскости имеют ровно одну общую точку. Докажите самостоятельно “двойственное” утверждение: через любые две несовпадающие точки на проективной плоскости проходит ровно одна проективная прямая.

Всякая проективная прямая $\ell \subset \mathbb{F}P^2$ имеет, тем самым, одну общую точку с бесконечно удаленной прямой ℓ_∞ — бесконечно удаленную точку $a = \ell \cap \ell_\infty$. Дополнение $\mathbb{F}P^2 \setminus \ell_\infty = F^2$ — аффинная плоскость, в которой дополнение $\ell \setminus \{a\} \subset \mathbb{F}^2$ — аффинная прямая. Верно и обратное (докажите!): каждую аффинную прямую $m \subset \mathbb{F}^2$ можно дополнить точкой бесконечно удаленной прямой и получить проективную прямую. Если точка пересечения $a = \ell_1 \cap \ell_2$ двух проективных прямых лежит на бесконечно удаленной прямой, то соответствующие аффинные прямые $\ell_1 \setminus \{a\}$ и $\ell_2 \setminus \{a\}$ не пересекаются, то есть параллельны.

На этом основано старинное определение проективной плоскости: мы добавляем к точкам обычной плоскости “бесконечно удаленные” (или “идеальные”) точки. А именно, заметим, что отношение параллельности прямых на плоскости (и в любом аффинном пространстве) — отношение эквивалентности; таким образом, все прямые разбиваются на классы параллельности (“связки”, “пучки”, “пенсилы” — называют их по-разному): все прямые в одном классе параллельны друг другу, а в прямые разных классов не параллельны. Такой класс параллельности и назовем “идеальной” точкой; после этого проективной прямой мы будем называть обычную прямую ℓ плюс бесконечно удаленная точка — класс прямых, параллельных ℓ. Совокупность всех бесконечно удаленных точек мы тоже будем считать прямой (бесконечно удаленной).

Достоинство этого подхода в его наглядности и в том, что не нужно рассматривать трехмерное пространство $\mathbb{F}^3$. Вот как, например, выглядит утверждение, что две различные проективные прямые всегда пересекаются в одной точке: если прямые ℓ_1 и ℓ_2 — обычные и не параллельны, то они пересекаются в обычной точке на плоскости; если обычные и параллельны, то имеют общую “идеальную” точку (поскольку принадлежат одному классу). Если одна из прямых (скажем, ℓ_2) — бесконечно удаленная, то общая точка — идеальная точка, представляющая собой класс прямых, параллельных ℓ_1. Разберитесь самостоятельно, как на этом языке выглядит утверждение, что через любые две различные точки (обычные или идеальные!) проходит ровно одна проективная прямая.

Недостаток “старинного” подхода в том, что создается иллюзия, будто бесконечно удаленные точки и прямые это нечто особенное. На самом деле это не так — все точки и прямые на проектвной плоскости (и в проективном пространстве любой размерности) “проективно одинаковы” — переводятся друг в друга проективными отображениями; см. следующий раздел.

2. Проективные отображения

Отображение проективных пространств $A : \mathbb{P}V_1 \to \mathbb{P}V_2$ называется проективным, если существует линейное отображение $C : V_1 \to V_2$ такое, что $\operatorname{Ker} C = \{0\}$ и $A(\ell) = C(\ell) \in \mathbb{P}V_2$ для произвольной прямой $\ell \in \mathbb{P}V_1$. В этом случае пишут $A = \mathbb{P}C$.

Важное замечание. Напомним, что ядром C (обозначение $\operatorname{Ker} C$ называется множество векторов $v \in V_1$ (на самом деле векторное подпространство), переводимых C в нуль: $\operatorname{Ker} C = C^{-1}(0)$. Определение проективного преобразования предполагает, что для всякого одномерного подпространства (т.е. прямой) $\ell \subset V_1$ его образ $C(\ell)$ — также одномерное подпространство. Именно поэтому нужно требовать, чтобы ядро C состояло только из нуля: если это не так, то ядро — подпространство положительной размерности и, следовательно, содержит как минимум одну прямую. Эта прямая переходит под действием C не в прямую, а в точку, и отображение $\mathbb{P}C$ определить не удается. С другой стороны, образом прямой при линейном отображении может быть либо прямая, либо точка 0 — следовательно, если $\operatorname{Ker} C = \{0\}$, то всякая прямая действительно переходит в прямую.

Если пространство V_1 конечномерно и $\operatorname{Ker} C = \{0\}$, то $\dim C(V_1) = \dim V_1$ согласно теореме 5 лекции 4. С другой стороны, $C(V_1) \subset V_2$; если V_2 также конечномерно, то получается $\dim V_2 \geq \dim C(V_1) = \dim V_1$. Если $\dim V_2 = \dim V_1$, то $C(V_1) = V_2$ и, следовательно, C обратимо, так что A также обратимо. Тем самым получается, что существуют проективные отображения только из пространств меньшей размерности в пространства большей (или той же самой) размерности и проективное отображение между пространствами одинаковой размерности всегда обратимо; в частности, это относится к проективным отображениям из пространства в себя — проективным преобразованиям.

Пусть V — конечномерное векторное пространство; обозначим $\mathrm{PGL}(V)$ множество проективных преобразований $A : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$. По определению проективного преобразования имеется отображение $P : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$, сопоставляющее обратимому линейному преобразованию C проективное преобразование $\mathbb{P}C$.

Теорема 1. *Отображение P является гомоморфизмом групп преобразований. Его ядро состоит из всех линейных преобразований вида $\lambda \operatorname{id}_V$, где $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно. Также очевидно (почему?), что $\lambda \operatorname{id}_v \in \operatorname{Ker} P$ для любого $\lambda \neq 0$; наша задача — доказать, что больше никаких операторов ядро P не содержит. Действительно, пусть $A \in \operatorname{Ker} P$ и пусть $v \in V$, $v \neq 0$. Прямая $\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in F\}$ должна переходить при отображении $\mathbb{P}A$ в себя, откуда следует, что существует число $\lambda_v \neq 0$ такое, что $Av = \lambda_v v$. Очевидно, что если $u = tv$ для любого $t \in \mathbb{F}$, то $Au = tAv = t\lambda_v v = \lambda_v u$.

Пусть теперь вектор $u \neq 0$ и не пропорционален v; тогда $Au = \lambda_u u$, $\lambda_u \neq 0$. Теперь $A(u+v) = \lambda_u u + \lambda_v v$; с другой стороны, существует $\lambda_{u+v} \neq 0$ такое, что $A(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v)$. Поскольку u и v линейно независимы, вектор $A(u+v)$ представляется в виде их линейной комбинации единственным образом, так что $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$. Тем самым доказано, что число λ_v для всех векторов $v \neq 0$ одно и то же. Обозначим это число λ и получим $A = \lambda \operatorname{id}_V$. $\square$

Следствие мелким шрифтом для тех, кто знаком с теорией групп. *Группа проективных преобразований* $\mathrm{PGL}(V)$ *— факторгруппа* $\mathrm{GL}(V)$ *по подгруппе* $\{\lambda \operatorname{id}_V\}$.

Пример 1, продолжение 2. Группа $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^2)$ состоит из матриц $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $\det B = ad - bc \neq 0$ и действует в $\mathbb{F}^2$ как $B\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}$. Преобразование $\mathbb{P}B$ действует на проективной прямой как $\mathbb{P}B([x_0 : x_1]) = [ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1]$; если использовать координату t на аффинной части прямой (см. выше раздел 1.1), то получится $B([1 : t]) = [a + bt : c + dt] = [1 : \frac{c+dt}{a+bt}]$. Иными словами, $\mathbb{P}B$ — дробно-линейная функция $\mathbb{P}B(t) = \frac{c+dt}{a+bt}$ (или линейная, если $b = 0$). Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что $\mathbb{P}B(t) \neq const$. Как легко проверить, $\mathbb{P}B(\infty) = d/b$ и $\mathbb{P}B(-a/b) = \infty$, что при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ согласуется с понятием (бесконечного) предела. Тем самым $\mathrm{PGL}(1, \mathbb{F})$ это группа дробно-линейных преобразований с операцией композиции. Заметим, что $\mathbb{P}B$ — линейная неоднородная (аффинная) функция тогда и только тогда, когда $b = 0$, что эквивалентно условию $\mathbb{P}B(\infty) = \infty$ — ср. с теоремой 2 ниже.

Пусть теперь V конечномерно и $W \subset V$ — гиперплоскость, множество нулей линейного функционала μ. Тогда, как было доказано ранее, $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$ — аффинное подпространство, параллельное W. Обозначим $\mathrm{Norm}_W(V) \subset \mathrm{PGL}(V)$ множество проективных преобразований $\mathbb{P}V$, переводящих проективную гиперплоскость $\mathbb{P}W$ ("бесконечно удаленную гиперплоскость") в себя. (Такое подмножество можно определить для любого множества $W \subset V$ и любой группы преобразований V — оно называется нормализатором W в этой группе.)

Теорема 2. $\mathrm{Norm}_W(V)$ *— группа преобразований (подгруппа* $\mathrm{PGL}(V)$*). Любое преобразование $B \in \mathrm{Norm}_W(V)$ переводит множество $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$ в себя; его ограничение на это множество — аффинное преобразование. Всякое аффинное преобразование $C : \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W \to \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$ может быть получено таким способом, причем из единственного проективного преобразования $B \in \mathrm{Norm}_W(V)$. Тем самым группа* $\mathrm{Norm}_W(V)$ *изоморфна* $\mathrm{Aff}(\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W)$.

Доказательство. Пусть $B = \mathbb{P}A$, где $A \in \mathrm{GL}(V)$. Очевидно, $B \in \mathrm{Norm}_W(V)$ тогда и только тогда, когда $AW \subset W$. Преобразование A обратимо, так что образ AW — векторное подпространство в V той же размерности, что и W; поэтому из $AW \subset W$ следует, что $AW = W$. В силу той же обратимости $A(V \subset W) = V \subset W$ (почему?), откуда $B(\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W) = \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$.

Пусть теперь $L \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \mu(v) = 1\} \subset V$ — аффинное подпространство (гиперплоскость), параллельное W. Зафиксируем точку $e \in L$; теперь если $a \in L$ — любая другая точка, то $\mu(a - e) = \mu(a) - \mu(e) = 1 - 1 = 0$, так что $a - e \in W$. Обратное, очевидно, тоже верно: если $w \in W$, то $a \stackrel{\text{def}}{=} e + w \in L$. Тем самым $L = e + W$, откуда $A(L) = A(e) + W$ (напомним, что $AW = W$).

Очевидно, $e \notin W$: $\mu(e) = 1$, но $\mu(w) = 0$ для любого $w \in W$. Отсюда следует, что векторное подпространство $\langle e \cup W \rangle$ (множество линейных комбинаций e и всех векторов из W) не совпадает с W (и, следовательно, есть все V, поскольку $\dim V = \dim W + 1$, но нам это даже неважно.) Если $\mu(A(e)) = 0$, то $A(e) \in W$, откуда вытекает, что $A(\langle e \cup W \rangle) \subset W$, но это невозможно, т.к. $\dim W < \dim \langle e \cup W \rangle$, а оператор A обратим. Следовательно, $\mu(A(e)) \neq 0$. Тогда оператор $A' \stackrel{\text{def}}{=} A/\mu(A(e))$ переводит e в точку $a = A(e)/\mu(A(e))$, для которой $\mu(a) = 1$, так что $a \in L$. Следовательно (докажите!), $A'L = L$. С другой стороны, $B = \mathbb{P}A = \mathbb{P}A'$; поскольку нам неважно, какой именно оператор A с $\mathbb{P}A = B$ рассматривать, то фактическм мы могли с самого начала считать, что A переводит L в себя.

$A \in \mathrm{GL}(V)$ — линейное преобразование, а, следовательно, и аффинное. Тогда ограничение $A|_L : L \to L$ — также аффинное преобразование, которое по определению аффинной структуры в $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$ совпадает с ограничением B на $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$. Остальные утверждения немедленно следуют из теоремы 5 дополнительной лекции 5A. (Если вы не разбирали лекцию 5A, то изучите отдельно доказательство теоремы 5 — оно почти не связано с остальным содержанием лекции.) $\square$