ЛЕКЦИЯ 10

Аннотация. Действие проективной группы на наборах точек. Теорема Дезарга. Проективная двойственность.

Пусть V — конечномерное пространство, $\dim V = n+1$, и $H = \mathbb{P}V$ — его проективизация. Будем говорить, что $a_1, \dots, a_{n+2} \in H$ — точки общего положения, если никакие $(n+1)$ из них не лежат в собственном проективном подпространстве H. Если $v_i \in a_i \subset V$ — ненулевой вектор (т.е. базис в прямой $a_i \subset V$), то условие общности положения эквивалентно (почему?) тому, что любые $(n+1)$ векторов из $v_1, \dots, v_{n+2}$ образуют базис в пространстве V.

Пример 1. Примеры наборов точек общего положения: три попарно различных точки на проективной прямой; четыре точки на проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Теорема 1. *Пусть $a_1, \dots, a_{n+2} \in H$ и $b_1, \dots, b_{n+2} \in H$ — два набора точек общего положения. Тогда существует и единственно проективное преобразование $C \in \mathrm{PGL}(H)$ такое, что $C(a_i) = b_i$ для всех $i = 1, \dots, n+2$.*

Доказательство. Зафиксируем ненулевые векторы $u_i \in a_i \subset V$ и $v_i \in b_i \subset V$. Векторы $u_1, \dots, u_{n+1}$ образуют базис; разложим по нему последний вектор: $u_{n+2} = x_1 u_1 + \dots + x_{n+1} u_{n+1}$ и заметим, что среди чисел $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{F}$ нет нулей. Действительно, если $x_i = 0$, то вектор u_i не лежит в линейной оболочке векторов $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{n+1}, u_{n+2}$, так что эти $(n+1)$ векторов не образуют базис в V вопреки условию, что $a_1, \dots, a_{n+2}$ — точки общего положения.

Аналогично пусть $v_i \in b_i$ — ненулевые векторы, $v_1, \dots, v_{n+1}$ по условию — базис, и $v_{n+2} = y_1 v_1 + \dots + y_{n+1} v_{n+1}$. Пусть искомое проективное преобразование $C = \mathbb{P}A$, где $A : V \to V$ — обратимое линейное преобразование. Условие $C(a_i) = b_i$ означает, что $Au_i = t_i v_i$, $t_i \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ для всех$i = 1, \dots, n+2$. Поскольку $u_1, \dots, u_{n+1}$ — базис, константы $t_1, \dots, t_{n+1}$ определяют линейное преобразование A (а, следовательно, и проективное преобразование C) однозначно.

Имеем: $Au_{n+2} = A(x_1 u_1 + \dots + x_{n+1} u_{n+1}) = x_1 A u_1 + \dots + x_{n+1} A u_{n+1} = t_1 x_1 v_1 + \dots + t_{n+1} x_{n+1} v_{n+1} = t_{n+2} y_1 v_1 + \dots + t_{n+2} y_{n+1} v_{n+1}$, откуда в силу неравенства $x_i \neq 0$ и того факта, что $v_1, \dots, v_{n+1}$ — базис, вытекает, что $t_i = (y_i/x_i) t_{n+2}$ для всех $i = 1, \dots, n+1$. Тем самым $t_1, \dots, t_{n+1}, t_{n+2}$ существуют и единственны с точностью до общего ненулевого множителя. Это и означает существование и единственность проективного преобрзования $C = \mathbb{P}A$. □

Пример применения теоремы 1:

Теорема 2 (Дезарга)**.** *Пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения прямых $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ и $bc \cap b'c'$ лежат на одной прямой.*

Доказательство. Утверждение теоремы Дезарга является проективно инвариантным — если оно верно для какой-либо конфигурации, то верно и для всех конфигураций, получающихся из данной проективным преобразованием. В силу теоремы 1 можно проективным преобразованием отправить две произвольных точки на бесконечно удаленную прямую. Сделаем это с точками $ab \cap a'b'$ и $bc \cap b'c'$. Тогда получится такое утверждение: пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в точке o, прямая ab параллельна прямой $a'b'$, прямая bc параллельна прямой $b'c'$. Тогда прямая ac параллельна прямой $a'c'$. Это утверждение доказывается средствами элементарной геометрии: из соображений подобия отношение длин отрезков $oa/oa' = ob/ob'$ (поскольку ab параллельна $a'b'$) и $ob/ob' = oc/oc'$ (поскольку bc параллельна $b'c'$). Отсюда вытекает $oa/oa' = oc/oc'$ и, следовательно, ac параллельна $a'c'$. □

Еще пример применения теоремы 1 — в случае $n = 1$. Группа $\mathrm{PGL}(1, \mathbb{F})$ проективных отображений проективной прямой $\mathbb{F}P^1 = \mathbb{F} \sqcup \{\infty\}$ состоит, согласно примеру 1 лекции 9, из дробно-линейных преобразований вида $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{F}$, $ad - bc \neq 0$, с операцией композиции. Согласно теореме 1, для любых попарно различных точек (т.е. точек общего положения) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}P^1$ существует и единственно проективное преобразование, переводящее их в любые три попарно различные точки y_1, y_2, y_3. Выберем в качестве образов точки $y_1 = \infty$, $y_2 = 0$ и $y_3 = 1$ (такие точки есть на проективной прямой $\mathbb{F}P^1$ над любым полем $\mathbb{F}$!). Также предположим временно, что ни одна из точек x_1, x_2, x_3 не равна ∞. Тогда $x_1 \in \mathbb{F}$ должен быть корнем знаменателя дроби $\frac{at+b}{ct+d}$, а x_2 — корнем числителя. Следовательно, дробь имеет вид $f(t) = u\frac{t-x_2}{t-x_1}$; константу u определим однозначно из условия $f(x_3) = 1$: $u = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$. Таким образом, функция f переводит произвольную точку $x_4 \in \mathbb{F}P^1$ в точку $\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_3)} \in \mathbb{F}P^1$. Этот элемент (число или ∞) называется *двойным отношением* точек x_1, x_2, x_3, x_4 и обозначается (x_1, x_2, x_3, x_4).

Замечание. Из явной формулы для двойного отношения следует, что оно корректно определено (как?) также и в случае, когда одна из точек $x_1, \dots, x_4$ равна ∞. Кроме того, мы определили двойное отношение в случае, когда $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}$ и попарно различны, но явная формула позволяет распространить его на случаи, когде некоторые точки совпадают — см. подробнее задачу 1 листка $8-\varepsilon$.

Теорема 3. *Взаимно однозначное отображение $g : \mathbb{F}P^1 \to \mathbb{F}P^1$ тогда и только тогда является проективным, когда оно сохраняет двойное отношение: для любых четырех попарно различных точек $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{F}P^1$ верно равенство $(g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.*

Доказательство. Пусть вначале $g \in \mathrm{PGL}(1, \mathbb{F})$, и пусть $f \in \mathrm{PGL}(1, \mathbb{F})$ — преобразование, для которого $f(x_1) = \infty$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 1$ и, по определению двойного отношения, $f(x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Тогда отображение $h = f \circ g^{-1} \in \mathrm{PGL}(1, \mathbb{F})$ удовлетворяет равенствам $h(g(x_1)) = \infty$, $h(g(x_2)) = 0$, $h(g(x_3)) = 1$ и, следовательно, $h(g(x_4)) = (g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4))$. С другой стороны, $h(g(x_4)) = f(x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — следовательно, проективное преобразование g сохраняет двойное отношение.

Обратно, пусть g сохраняет двойное отношение. Рассмотрим проективное преобразование f, для которого $f(g(x_1)) = x_1$, $f(g(x_2)) = x_2$, $f(g(x_3)) = x_3$ — оно существует по теореме 1. Согласно первой части теоремы $(x_1, x_2, x_3, f(g(x_4)) = (g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ (второе равенство — потому что g сохраняет двойное отношение). Отсюда вытекает (докажите!), что $f(g(x_4)) = x_4$. Поскольку точка $x_4 \in \mathbb{F}P^1$ произвольная, получается, что $f \circ g = \mathrm{id}$, то есть $g = f^{-1}$. Но f проективно, а проективные преобразования образуют группу, то есть g проективно. □

Пусть теперь V — конечномерное пространство размерности $n+1$, а V^* — двойственное пространство. Напомним (лекция 4), что $\dim V^* = \dim V$ и что существует канонический изоморфизм $\Phi : V \to V^{**}$, сопоставляющий вектору $v \in V$ линейный функционал $\delta_v \in V^{**}$, определенный как отображение $\Phi(v) : V^* \to \mathbb{F}$, действующий на функционал $\alpha \in V^*$ по формуле $\Phi(v)(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(v)$. (Почему этот изоморфизм канонический, см. в лекции 4.) Сопоставим каждому векторному подпространству $W \subset V$ его аннулятор $W^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in V^* \mid \alpha(w) = 0 \, \forall w \in W\}$.

Теорема 4 (доказанная в лекции 4). (1) $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$;
(2) $(W^\perp)^\perp = \Phi(W) \subset V^{**}$.

Теорема 5 (забытая в лекции 4). *Операция аннулятора переводит пересечение в линейную оболочку объединения и наоборот. А именно, пусть $W_1, W_2 \subset V$ — векторные подпространства. Тогда $(W_1 \cap W_2)^\perp = \langle W_1^\perp \cup W_2^\perp \rangle$ и $\langle W_1 \cup W_2 \rangle^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.*

Доказательство. Для всякого множества $X \subset V$ линейный функционал $\alpha \in V^*$ равен нулю на всех точках $v \in X$ тогда и только тогда, когда он равен нулю во всех точках $v \in \langle X \rangle$ линейной оболочки X. Тем самым $\langle W_1 \cup W_2 \rangle^\perp \subset V^*$ состоит из всех линейных функционалов, равных нулю как на W_1, так и на W_2 — то есть, совпадает с $W_1^\perp \cap W_2^\perp$. Теперь $\langle W_1^\perp \cup W_2^\perp \rangle^\perp = (W_1^\perp)^\perp \cap (W_2^\perp)^\perp = \Phi(W_1) \cap \Phi(W_2) = \Phi(W_1 \cap W_2) = ((W_1 \cap W_2)^\perp)^\perp$. Но если у двух векторных подпространств совпадают аннуляторы, то и сами пространства совпадают, так что $\langle W_1^\perp \cup W_2^\perp \rangle = (W_1 \cap W_2)^\perp$. □

Рассмотрим теперь вместо каждого векторного подпространства $W \subset V$ его проективизацию $\mathbb{P}W \subset \mathbb{P}V$. Очевидно, проективизация пересечения — пересечение ($\mathbb{P}(W_1 \cap W_2) = \mathbb{P}W_1 \cap \mathbb{P}W_2$), а линейной оболочке соответствует проективная оболочка — пересечение всех проективных подпространств, содержащих данное множество. Так, $\mathbb{P}\langle W_1 \cup W_2 \rangle$ — пересечение всех проективных подпространств, содержащих как $\mathbb{P}W_1$, так и $\mathbb{P}W_2$.

Каждому проективному подпространству $H \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}W \subset \mathbb{P}V$ мы сопоставим его двойственное $H^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}W^\perp \subset \mathbb{P}V^*$.

Следствие 1 (теоремы 4). $\dim H^\vee = \dim \mathbb{P}V - 1 - \dim H$. $(H^\vee)^\vee = \mathbb{P}\Phi(H)$ *(где $\mathbb{P}\Phi : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V^{**}$ — проективный изоморфизм, являющийся проективизацией канонического линейного изоморфизма $\Phi : V \to V^{**}$).*

Следствие 2 (теоремы 5). $(H_1 \cap H_2)^\vee = \langle H_1^\vee \cup H_2^\vee \rangle$, $\langle H_1 \cup H_2 \rangle^\vee = H_1^\vee \cap H_2^\vee$ *(здесь $\langle \cdot \rangle$ означает проективную оболочку).*

Пример 2. Пусть $V = \mathbb{F}^3$, так что $\mathbb{P}V = \mathbb{F}P^2$ — проективная плоскость. Из следствия 1 вытекает, что нульмерным проективным подпространствам в $\mathbb{F}P^2$ — точкам — соответствуют пространства размерности $2 - 1 - 0 = 1$ — прямые двойственной проективной плоскости, а одномерным подпространствам — прямым — точки на проективной плоскости. Из следствия 2 вытекает, что если прямым $\ell_1 \subset \mathbb{F}P^2$ и $\ell_2 \subset \mathbb{F}P^2$ двойственны точки $p_1, p_2 \in (\mathbb{F}P^2)^*$, то точке пересечения $a = \ell_1 \cap \ell_2$ двойственна прямая $\ell \subset (\mathbb{P}F^2)^*$ — проективная оболочка точек p_1 и p_2, то есть прямая, проведенная через эти точки.

В любом утверждении проективной геометрии, содержащем только подпространства и проективные оболочки, можно заменить каждое подпространство на двойственное, пересечение — на проективную оболочку и наоборот, и получить другое верное утверждение, “двойственное” исходному.

Пример 3. Сформулируем теорему, двойственную к теореме Дезарга. Согласно примеру 2, точкам a, a', b, b', c, c' двойственны прямые $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$. Прямым aa', bb', cc', согласно следствию 2, двойственны точки пересечения $\alpha \cap \alpha'$, $\beta \cap \beta'$ и $\gamma \cap \gamma'$. К утверждению, что три прямые пересекаются в одной точке, двойственно утверждение, что три точки лежат на одной прямой. Итого получается следующее утверждение: пусть точки пересечения прямых $\alpha \cap \alpha'$, $\beta \cap \beta'$ и $\gamma \cap \gamma'$ лежат на одной прямой. Обозначим точки пересечения прямых $\{p\} = \alpha \cap \beta$, $\{p'\} = \alpha' \cap \beta'$, $\{q\} = \alpha \cap \gamma$, $\{q'\} = \alpha' \cap \gamma'$, $\{r\} = \beta \cap \gamma$, $\{r'\} = \beta' \cap \gamma'$. Тогда прямые pp', qq' и rr' пересекаются в одной точке.

Если теперь переименовать $p \mapsto a$, $q \mapsto b$, $r \mapsto c$, и соответственно p', q', r', то прямая α станет прямой ab, $\beta \mapsto bc$ и $\gamma \mapsto ac$, и аналогично α', β', γ'. Отсюда видно, что сформулированная двойственная теорема является обратной к самой теореме Дезарга: если точки пересечения прямых $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ и $bc \cap b'c'$ лежат на одной прямой, то прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке.