ЛЕКЦИЯ 11

Аннотация. Билинейные и квадратичные формы.

Определение 1. *Билинейной формой* на векторном пространстве V (над полем $\mathbb{F}$) называется отображение $B : V \times V \to \mathbb{F}$, линейное по каждому из двух аргументов при фиксированном втором: $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w)$ и аналогично для второго аргумента; здесь $u, v, w \in V$ — произвольные векторы и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ — произвольные числа. Билинейная форма называется *симметрической*, если $B(u, v) = B(v, u)$ для всех $u, v \in V$ и *кососимметрической*, если $B(u, v) = -B(v, u)$. Билинейная форма называется *невырожденной*, если для всякого вектора $u \neq 0$ существует вектор v, для которого $B(u, v) \neq 0$.

Определение 1'. Билинейной формой на пространстве V называется линейное отображение $\widetilde{B} : V \to V^*$. Билинейная форма называется симметрической, если $\widetilde{B} = \widetilde{B}^* \circ \Phi$, и кососимметрической, если $\widetilde{B} = -\widetilde{B}^* \circ \Phi$; здесь $\Phi : V \to V^{**}$ — каноническое отображение (изоморфизм, если V конечномерно). Билинейная форма называется невырожденной, если ядро оператора $\widetilde{B}$ тривиально: $\operatorname{Ker}(\widetilde{B}) = \{0\}$.

Эквивалентность определений: если B — билинейная форма в смысле определения 1, то оператор $\widetilde{B}$ определяется так: $\widetilde{B}(u) \in V^*$ — линейный функционал, переводящий $v \in V$ в $B(u, v) \in \mathbb{F}$. Обратно, если $\widetilde{B} : V \to V^*$ — линейный оператор, то билинейная форма B определяется формулой $B(u, v) = \widetilde{B}(u)(v)$.

Проверка эквивалентности определений симметрической и кососимметрической формы — упражнение.

Невырожденность: пусть форма B невырождена в смысле определения 1, и пусть вектор u принадлежит ядру оператора $\widetilde{B}$: $\widetilde{B}(u) = 0 \in V^*$. Тогда для произвольного вектора $v \in V$ имеет место равенство $B(u, v) = (\widetilde{B}(u))(v) = 0$, что в силу невырожденности возможно только при $u = 0$. Таким образом, ядро $\widetilde{B}$ состоит только из нуля. Обратно, пусть $\operatorname{Ker}(\widetilde{B}) = \{0\}$, и пусть $u \neq 0$. Тогда $\widetilde{B}(u) \neq 0 \in V^*$, то есть найдется $v \in V$ такой, что $(\widetilde{B}(u))(v) \neq 0 \in \mathbb{F}$. Это означает, что $B(u, v) \neq 0$, то есть B невырождена в смысле определения 1.

Пример 1. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ — плоскость из школьной геометрии. Скалярное произведение векторов u и v определяется равенством $(u, v) = |u|\,|v| \cos\varphi$, где φ — угол между векторами. Скалярное произведение, очевидно, симметрично: $(u, v) = (v, u)$. С другой стороны, $|v| \cos\varphi = \operatorname{pr}_u(v)$ — длина проекции вектора v на направление вектора u; при этом если проекция направлена в ту же сторону, что и сам вектор u (это соответствует $|\varphi| < \pi/2$), то длина ее берется со знаком плюс (как раз $\cos\varphi > 0$), а если проекция направлена в противоположную сторону, то со знаком минус ($\pi/2 < |\varphi| \leq \pi \Rightarrow \cos\varphi < 0$). Нетрудно убедиться, что проекция со знаком — линейное отображение: $\operatorname{pr}_u(v + w) = \operatorname{pr}_u(v) + \operatorname{pr}_u(w)$ и $\operatorname{pr}_u(\alpha v) = \alpha \operatorname{pr}_u(v)$ для всех векторов u, v, w и любого числа α. Отсюда вытекает, что скалярное произведение линейно по второму аргументу (v) при фиксированном первом (u); в силу симметрии получим, что оно линейно также и по первому аргументу при фиксированном втором.

Следовательно, скалярное произведение — симметрическая билинейная форма. Она невырождена: если $u \neq 0$, то возьмем $v = u$; получается $(u, u) = |u|^2 \neq 0$.

Билинейные формы на векторном пространстве V образуют векторное пространство, обозначаемое $\mathcal{B}(V)$: сложение форм и их умножение на скаляры производятся почленно: $(\alpha B_1 + \beta B_2)(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha B_1(u, v) + \beta B_2(u, v)$, где $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(V)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$; легко видеть, что это равенство определяет (в левой части) билинейную форму. Симметрические и кососимметрические формы образуют векторные подпространства в $\mathcal{B}(V)$, обозначаемые соответственно $\operatorname{Symm}(V)$ и $\operatorname{Alt}(V)$ — для доказательства этого следует проверить (проделайте!), что линейная комбинация симметрических форм симметрическая, а кососимметрических — кососимметрическая.

Лемма 1. *Если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2 (иными словами, в этом поле $2 \stackrel{def}{=} 1 + 1 \neq 0$), то любая билинейная форма однозначно представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической форм.*

Доказательство. Пусть B — билинейная форма; тогда форма $B_1(u, v) = B(u, v) + B(v, u)$ — симметрическая, а $B_2(u, v) = B(u, v) - B(v, u)$ — кососимметрическая. Имеем $2B(u, v) = B_1(u, v) + B_2(u, v)$. Поскольку $2 \neq 0$, поле $\mathbb{F}$ содержит элемент $\frac{1}{2}$, обратный 2. Умножение на него дает $B = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2$, где первое слагаемое симметрическое, а второе кососимметрическое — существование представления доказано.

Единственность: если $B_1 + B_2 = B_1' + B_2'$, где первые слагаемые симметрические, а вторые — кососимметрические. Тогда форма $B \stackrel{\text{def}}{=} B_1 - B_1' = B_2' - B_2$ одновременно симметрическая и кососимметрическая: $B(u, v) = B(v, u) = -B(u, v)$, откуда $2B(u, v) = 0$ и, поскольку $2 \neq 0$, $B = 0$. Следовательно, $B_1 = B_1'$ и $B_2 = B_2'$, и единственность доказана. □

Следствие 1. *Если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, то подпространства $\mathrm{Symm}(V) \subset \mathcal{B}(V)$ и $\mathrm{Alt}(V) \subset \mathcal{B}(V)$ пересекаются только по нулевому элементу (форме, тождественно равной нулю). Линейная оболочка их объединения совпадает со всем пространством $\mathcal{B}(V)$.*

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что любой вектор $u \in \mathcal{B}(V)$ представляется в виде суммы $u = v + w$, где $v \in \mathrm{Symm}(V)$, а $w \in \mathrm{Alt}(V)$. Следовательно, линейная оболочка объединения подпространств $\mathrm{Symm}(V)$ и $\mathrm{Alt}(V)$ совпадает с $\mathcal{B}(V)$. Если $u \in \mathrm{Symm}(V) \cap \mathrm{Alt}(V)$, то в его единственном представлении в виде суммы симметрической и кососимметрической формы не должно быть первого слагаемого (потому что $u \in \mathrm{Alt}(V)$) и не должно быть второго (потому что $u \in \mathrm{Symm}(V)$). Следовательно, $u = 0$. □

Определение 2. Рангом билинейной формы B на конечномерном пространстве V называется число $\mathrm{rk}\, B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim \widetilde{B}(V) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\, \widetilde{B}$.

В частности, невырожденные формы это формы, ранг которых равен $\dim V$.

Замечание мелким шрифтом. Определение 1 невырожденной формы, приведенное выше, несимметрично: произвольный вектор u подставляется только на место первого аргумента. Из определения 1' видно, однако, что если V конечномерно, то эта несимметричность кажущаяся:

Лемма 2. *Пусть V конечномерно, а билинейная форма B невырождена. Тогда для любого вектора $u \neq 0$ найдется вектор v такой, что $B(v, u) \neq 0$.*

Доказательство. Поскольку B невырождена, $\mathrm{Ker}(\widetilde{B}) = \{0\}$. Следовательно, ранг формы это $\dim \widetilde{B}(V) = \mathrm{rk}\, B = \dim V = \dim V^*$, то есть образ $\widetilde{B}$ — все пространство V^*. Тогда размерность аннулятора образа (обозначим его $W \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{B}(V)^\perp \subset V^{**}$ равна $\dim W = \dim V^* - \dim \widetilde{B}(V) = 0$, то есть $W = \{0\}$. Следовательно, $\Phi^{-1}(W) = \{0\} \subset V$ (где $\Phi : V \to V^{**}$ — канонический линейный изоморфизм). С другой стороны, $u \in \Phi^{-1}(W)$ тогда и только тогда, когда $(\Phi(u))(w) = 0$ для всякого $w \in \widetilde{B}(V)$, то есть тогда и только тогда, когда $(\Phi(u))(\widetilde{B}(v)) = 0$ для всякого $v \in V$. По определению изоморфизма Φ последнее равенство означает, что $(\widetilde{B}(v))(u) = 0$, то есть $B(v, u) = 0$ для всякого v. Тем самым если $u \neq 0$, то $u \notin \Phi^{-1}(W)$, то есть найдется $v \in V$, для которого равенство $B(v, u) = 0$ не выполнено. □

Если пространство V конечномерно и $e_1, \dots, e_n$ — базис в нем, то матрицей билинейной формы B в данном базисе называется матрица M_B размера $n \times n$, элементы которой равны $(M_B)_{ij} = B(e_i, e_j)$. Если $e_1^*, \dots, e_n^* \in V^*$ — базис, двойственный к e, то, как нетрудно убедиться (проделайте!), M_B это матрица оператора $\widetilde{B} : V \to V^*$ в базисах e, e^*.

Если теперь $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ и $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$, то из билинейности вытекает, что

$$B(u, v) = \sum_{i,j=1}^n B(e_i, e_j) u_i v_j. \tag{1}$$

Продолжение примера 1. Если e_1, e_2 — перпендикулярные векторы единичной длины на плоскости. Тогда скалярное произведение $(e_1, e_1) = (e_2, e_2) = 1$ (единичная длина) и $(e_1, e_2) = 0$ (перпендикулярность). Тем самым матрица скалярного произведения в таком базисе — единичная. Из формулы (1) вытекает, что $(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2$, где u_1, u_2 и v_1, v_2 — координаты векторов u и v в базисе e_1, e_2.

Из формулы (1) очевидно следует

Теорема 1. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ — фиксированный базис в V. Тогда отображение $B \mapsto M_B$ представляет собой изоморфизм векторного пространства $\mathcal{B}(V)$ и векторного пространства $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ матриц $n \times n$ (в котором матрицы складываются и умножаются на числа поэлементно). (Иными словами, для любой матрицы M размера $n \times n$ существует и единственна билинейная форма B, матрица которой в данном базисе равна M. Матрица линейной комбинации билинейных форм — линейная комбинация их матриц с теми же коэффициентами.) Билинейная форма B симметрическая тогда и только тогда, когда матрица M симметрическая ($M^T = M$), и кососимметрическая тогда и только тогда, когда матрица M кососимметрическая ($M^T = -M$). Билинейная форма невырожденная тогда и только тогда, когда $\det M \neq 0$.*

(Последнее условие гарантирует, что ядро оператора $\widetilde{B}$ равно $\{0\}$.

Следствие 2. *Если V конечномерно и $\dim V = n$, то $\dim \mathcal{B}(V) = n^2$, $\dim \mathrm{Symm}(V) = n(n+1)/2$ и $\dim \mathrm{Alt}(V) = n(n-1)/2$.*

Если B — симметрическая билинейная форма, то квадратичной формой Q_B, соответствующей B, называется функция $Q_B : V \to \mathbb{F}$, заданная формулой $Q_B(u) = B(u, u)$. Квадратичные формы образуют векторное пространство $\mathrm{Quadr}(V)$ (с почленным сложением и умножением на число); как нетрудно видеть, соответствие $B \mapsto Q_B$ — линейное отображение.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле, характеристика которого не равна 2 Тогда соответствие $B \mapsto Q_B$ — линейный изоморфизм $\mathrm{Symm}(V) \to \mathrm{Quadr}(V)$, то есть для любой квадратичной формы Q существует ровно одна симметрическая билинейная форма B такая, что $Q = Q_B$.*

Доказательство. Если $Q(u) = B(u,u)$ и B симметрическая, то $Q(u+v) = B(u+v,u+v) = B(u,u)+B(u,v)+B(v,u)+B(v,v) = Q(u)+Q(v)+2B(u,v)$. Поскольку $2 \neq 0$, поле $\mathbb{F}$ содержит обратный к нему элемент $\frac{1}{2}$, откуда получаем

$$B(u,v) = \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)). \tag{2}$$

Но $u, v \in V$ — произвольные векторы, так что равенство (2) (называемое формулой поляризации) однозначно определяет билинейную форму B. □

Замечание. Если характеристика поля $\mathbb{F}$ равна 2, то $2B(u,v) = 0$, так что любая квадратичная форма удовлетворяет равенству $Q(u+v) = Q(u)+Q(v)$, то есть является аддитивной функцией. Тем не менее, если $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то функция Q не является линейной: для произвольного скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$ имеем (независимо от характеристики) $Q(\alpha u) = B(\alpha u, \alpha u) = \alpha^2 Q(u)$, что не равно $\alpha Q(u)$, если $\alpha \neq 0, 1$.

Пусть теперь $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Симметрическая билинейная форма B называется *положительно определенной* или *скалярным произведением*, если $Q_B(u) > 0$ для любого вектора $u \neq 0$. Скалярное произведение часто обозначают (u,v); также пишут $|u| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(u,u)}$.

Теорема 3. *Пусть B — положительно определенная симметрическая билинейная форма на пространстве V. Тогда*

(1) *Форма B невырождена.*
(2) *Для любых двух векторов u, v имеет место неравенство $|(u,v)| \leq |u|\ |v|$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы пропорциональны (линейно зависимы).*
(3) *Функция $d(u,v) \stackrel{def}{=} |u-v|$ является метрикой на V, то есть положительна при $u \neq v$, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника: $d(u.w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ для любых $u, v, w \in V$.*

Доказательство. Невырожденность была фактически доказана в примере 1: если $u \neq 0$, то $(u,u) > 0$ — в частности, $(u,u) \neq 0$.

Неравенство 2 (ср. с доказательством леммы 1 в лекции 6): если $u = 0$, то неравенство очевидно. В противном случае для любого t имеет место неравенство $0 \leq |v - tu|^2 = (v - tu, v - tu)$, причем равенство возможно (для подходящего t) только если $v = tu$. Согласно формуле (2) имеем $0 \leq |v - tu|^2 = |v|^2 - 2t(u,v) + t^2 |u|^2$ для всех t, причем равенство возможно (при подходящих t) только если вектор v пропорционален вектору u (напомним, что случай $u = 0$ уже рассмотрен). Но тогда дискриминант квадратного трехчлена неположителен: $(u,v)^2 - |u|^2\ |v|^2 \leq 0$, причем равен нулю только если вектор v пропорционален вектору u или если $u = 0$.

Утверждение 3: положительность функции d — следствие положительной определенности формы. Симметричность: $d^2(v,u) = |v-u|^2 = (v-u, v-u) = (-1)^2(u-v, u-v)$ (в силу линейности по каждому аргументу) $= |u-v|^2 = d^2(u,v)$; поскольку d положительно, то из этого вытекает, что $d(v,u) = d(u,v)$.

Докажем теперь неравенство треугольника. Согласно формуле 2, $d(u,w)^2 = |u-v|^2 = |(u-v)+(v-w)|^2 = |u-v|^2 + 2(u-v, v-w) + |v-w|^2 \leq |u-v|^2 + 2\,|u-v|\ |v-w| + |v-w|^2$ (согласно неравенству пункта 2) $= (\,|u-v| + |v-w|)^2 = (d(u,v) + d(v,w))^2$, что и требовалось доказать. □

Замечание 1. Пусть $W \subset V$ — векторное подпространство. Если форма B положительно определена на V, то ее ограничение на W (мы рассматриваем ту же функцию B двух аргументов, только аргументы берем не из всего пространства V, а из подпространства. Нетрудно видеть, что это билинейная форма на W.) также положительно определено и, следовательно, невырождено. Следует, однако, отметить, что "просто" невырожденная форма (не положительно определенная), в том числе симметрическая, может стать вырожденной при ограничении. Например, симметрическая форма $B((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = u_1v_2 + v_1u_2$ на пространстве $\mathbb{F}^2$ имеет в стандартном базисе матрицу $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и, следовательно, невырождена ($\det M = -1 \neq 0$). Но ограничение формы B на прямую $\{(t,0)\} \subset \mathbb{F}^2$ тождественно равно нулю.