ЛЕКЦИЯ 12 (НАЧАЛО)

Аннотация. Приведение симметрических и кососимметрических билинейных форм к каноническому виду.

Пусть теперь $A : V \to V$ — линейный оператор. Определим отображение $\mu_A : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(V)$ так: для произвольной билинейной формы B на пространстве V положим $\mu_A(B)(u, v) = B(Au, Av)$. Очевидно, $\mu_A(B)$ — билинейная форма; если B симметрическая, то и $\mu_A(B)$ симметрическая (т.е. $\mu_A(\mathrm{Symm}(V)) \subset \mathrm{Symm}(V)$); если B кососимметрическая, то и $\mu_A(B)$ тоже.

Лемма 1. *Если билинейной форме B соответствует оператор $\widetilde{B} : V \to V^*$, то билинейной форме $\mu_A(B)$ соответствует оператор $\widetilde{\mu_A(B)} = A^*\widetilde{B}A$.*

Доказательство. Для всех $u, v \in V$ имеем $((A^*\widetilde{B}A)u)(v) = ((\widetilde{B}A)u)(Av) = (\widetilde{B}(Au))(Av) = B(Au, Av) = \mu_A(B)(u, v)$. □

Следствие 2. *Если $\mathcal{B}$ — матрица формы B в базисе $e_1, \dots, e_n$, а $\mathcal{A}$ — матрица оператора A в том же базисе, то матрица формы $\mu_A(B)$ в том же базисе равна $\mathcal{A}^T\mathcal{B}\mathcal{A}$.*

Определение 3. Билинейные формы B_1 и B_2 на пространстве V называются (линейно) эквивалентными, если существует обратимый оператор $A : V \to V$ такой, что $B_2 = \mu_A(B_1)$.

Теорема 4.
(1) *Линейная эквивалентность билинейных форм — отношение эквивалентности (т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).*
(2) *Две билинейные формы B и B' на конечномерном пространстве V линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда в V найдутся базисы $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$, матрицы форм в которых одинаковы: $B(e_i, e_j) = B'(e'_i, e'_j)$ для всех $1 \le i, j \le \dim V$.*

Доказательство. Из определения отображения μ_A легко следует, что $\mu_{AB} = \mu_a \circ \mu_B$, а также $\mu_I = \mathrm{id}$ (тождественное отображение), если $I : V \to V$ — единичный оператор (т.е. тоже тождественное отображение). Отсюда вытекает (как?), что если оператор A обратим, то $\mu_{A^{-1}} = \mu_A^{-1}$. Заметим также (хотя мы почти не будем этим пользоваться), что для любой A отображение $\mu_A : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(V)$ линейно: $\mu_A(B_1 + B_2) = \mu_A(B_1) + \mu_A(B_2)$ и $\mu_A(tB) = t\mu_A(B)$ для всех билинейных форм B_1, B_2, B и произвольного скаляра $t \in \mathbb{F}$.

Иными словами, отображение $A \mapsto \mu_A$ является гомоморфизмом группы $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных отображений $V \to V$ в группу $\mathrm{GL}(\mathcal{B}(V))$ обратимых линейных отображений $\mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(V)$. Это позволяет немедленно доказать первое утверждение теоремы.

- Рефлексивность (всякая форма B эквивалентна сама себе): поскольку $\mu_I = \mathrm{id}$, имеем $B = \mu_I(B)$.
- Симметричность (если первая форма эквивалентна второй, то вторая эквивалентна первой): если $B_2 = \mu_A(B_1)$, где A обратим, то $B_1 = \mu_A^{-1}(B_2) = \mu_{A^{-1}}(B_2)$.
- Транзитивность (если первая форма эквивалентна второй, а вторая — третьей, то первая форма эквивалентна третьей): $B_2 = \mu_A(B_1)$, $B_3 = \mu_C(B_2)$ — следовательно, $B_3 = \mu_C(\mu_A(B_1)) = \mu_{CA}(B_1)$.

Второе утверждение теоремы: пусть $B' = \mu_A(B)$. Возьмем в качестве $e_1, \dots, e_n$ произвольный базис в V и положим $e'_i = A^{-1}e_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Поскольку оператор A^{-1} обратим, $e'_1, \dots, e'_n \in V$ — тоже базис. Теперь $B'(e'_i, e'_j) = (\mu_A(B))(e'_i, e'_j) = B(Ae'_i, Ae'_j) = B(e_i, e_j)$. Обратно, пусть $B(e_i, e_j) = B'(e'_i, e'_j)$ для всех $1 \le i, j \le n$, где e и e' — базисы в V. Тогда существует (и единствен) обратимый линейный оператор $A : V \to V$ такой, что $Ae'_i = e_i$ при всех $1 \le i \le n$. Тогда формы B' и $\mu_A(B)$ принимают одинаковые значения на векторах базиса $e'_1, \dots, e'_n$: $\mu_A(B)(e'_i, e'_j) = B(Ae'_i, Ae'_j) = B(e_i, e_j) = B'(e'_i, e'_j)$, то есть имеют в этом базисе одинаковую матрицу. Поскольку билинейная форма на конечномерном пространстве однозначно определяется своей матрицей, получаем $B' = \mu_A(B)$, то есть формы B и B' эквивалентны. □

Следствие 5 (леммы 1)**.** *Эквивалентные билинейные формы на конечномерном пространстве имеют одинаковый ранг. В частности, если форма B невырожденная, то и форма $\mu_A(B)$ невырожденная.*

Доказательство. Если A обратим, то и A^* обратим: $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ (проверьте!). Если $u \in \operatorname{Ker} \widetilde{\mu_A(B)}$, то есть $\widetilde{\mu_A(B)}u = 0$, то есть $A^*\widetilde{B}Au = 0$, то, применяя к этому равенству оператор $(A^*)^{-1}$, получим $\widetilde{B}Au = 0$. Это означает, что $Au \in \operatorname{Ker} \widetilde{B}$, то есть оператор A переводит подпространство $\operatorname{Ker} \widetilde{B}$ в подпространство $\operatorname{Ker} \widetilde{\mu_A(B)}$. Оператор A^{-1} переводит их в обратную сторону; таким образом, эти подпространства изоморфны и, следовательно, имеют одинаковую размерность. □

В силу доказанного все билинейные формы разбиваются на классы эквивалентности. В общем случае это разбиение необозримо; исследуем его в двух важных частных случаях — для симметрических и кососимметрических форм. В первом случае мы добьемся только частичного успеха:

Теорема 6. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле, характеристика которого не равна 2. Для произвольной симметрической формы B на пространстве $\mathbb{F}^n$ найдется набор чисел $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ такой, что форма B эквивалентна билинейной форме C, заданной формулой*

$$C(u, v) = c_1 u_1 v_1 + \dots + c_n u_n v_n; \tag{1}$$

здесь $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n)$. При этом если $k = \operatorname{rk} B$, то $c_1, \dots, c_k \neq 0$ и $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$.

Пример 1 (применения теоремы 6, который логически относится к следующей лекции). Рассмотрим однородный многочлен степени 2 от 3 переменных с вещественными коэффициентами: $Q(x, y, z) = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz$; очевидно, $Q = Q_B$, где B — симметрическая билинейная форма на $\mathbb{R}^3$ с матрицей $(b_{ij})_{i,j=1}^3$ (где подразумевается $b_{ij} = b_{ji}$ для всех i, j — отсюда и двойки в коэффициентах многочлена Q). Рассмотрим множество $C_Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x, y, z) = 0\}$, называемое квадратичным конусом. Оно обладает таким свойством: если вектор $v \neq 0$ принадлежит C_Q, то и любой пропорциональный ему вектор тоже принадлежит C_Q: $Q_B(v) = 0 \Rightarrow Q_B(\alpha v) = \alpha^2 Q_B(v) = 0$. То есть конус состоит из "целых" прямых: прямая, проходящая через нуль, либо целиком лежит в конусе, либо пересекается с ним только по точке 0. Это позволяет рассмотреть проективизацию C_Q — множество $E_Q \subset \mathbb{R}P^2$ лежащих в C_Q прямых: $E_Q \stackrel{\text{def}}{=} \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid Q(x, y, z) = 0\}$. E_Q называется проективной коникой. Из теоремы 6 вытекает, что существует линейный оператор A, переводящий квадратичный конус C_Q в множество (тоже квадратичный конус) $F_c \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 z^2 = 0\}$. Проективизация $\mathbb{P}A$ оператора A переводит конику E_Q в проективизацию множества F_c — конику $\mathbb{P}F_c = \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 z^2 = 0\}$.

В данном случае конус F_c (и, соответственно, конику $\mathbb{P}F_c$) можно еще более "стандартизировать". А именно, диагональный оператор $\Delta(x, y, z) = (t_1 x, t_2 y, t_3 z)$ переводит F_c в конус $\{(x, y, z) \mid c_1 t_1^2 x^2 + c_2 t_2^2 y^2 + c_3 t_3^2 z^2 = 0\}$. Коэффициенты c_i могут быть положительными, отрицательными или нулевыми; в зависимости от этого можно подобрать $t_i \neq 0$ такие, чтобы $c_i t_i^2 = 1$, -1 или 0. Оператор, меняющий местами переменные x, y и z, позволяет также изменить порядок коэффициентов в уравнении. Кроме того, если умножить уравнение на ненулевую константу (например, -1 — поменять все знаки на противоположные), то множество его решений не изменится. Это позволяет свести коэффициенты перед x^2, y^2 и z^2 к одному из шести случаев: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(1, 1, 1)$ и $(1, 1, -1)$.

Тем самым получается, что коника $\mathbb{P}F_c$ (а, следовательно, и исходная коника E_Q) переводится проективным преобразованием в одно из следующих множеств:

- $\mathbb{R}P^2$ — разумеется, это возможно только в том случае, если с самого начала $B \equiv 0$ и $E_Q = \mathbb{R}P^2$.
- $\{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid x^2 = 0\} = \{[0 : y : z] \in \mathbb{R}P^2\}$ — проективная прямая (обычно говорят "две совпавших прямых" по аналогии с четвертым случаем). Разумеется, тогда исходная коника E_Q сама являлась прямой (проективное преобразование переводит прямые в прямые).
- $\{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{[0 : 0 : 1]\} \subset \mathbb{R}P^2\}$ — точка (тогда E_Q тоже точка).
- $\{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid x^2 - y^2 = 0\} = \{[x : x : z] \in \mathbb{R}P^2\} \cup \{[x : -x : z] \in \mathbb{R}P^2\}$ — объединение двух пересекающихся в одной точке ($[0 : 0 : 1]$) проективных прямых; тогда исходная коника E_Q имеет такой же вид (только прямые другие).
- $\{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \varnothing$ (однородные координаты x, y, z не могут быть одновременно нулями). Это, разумеется, означает, что $E_Q = \varnothing$.
- $\{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. В этом случае $z \neq 0$ (иначе $x = y = 0$, что невозможно), то есть множество не пересекается с бесконечно удаленной прямой и лежит на обычной аффинной плоскости. В координатах $u = x/z$ и $v = y/z$ получается множество $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 - 1 = 0\}$ — окружность (т.е. коника E_Q проективно эквивалентна окружности).

Проективной (а также аффинной) эквивалентностью коник и многомерных квадрик мы займемся в следующей лекции (и будем постоянно пользоваться теоремой 6). Пока тем, кто знаком с понятиями параболы и гиперболы (задаваемых уравнениями второй степени на обычной плоскости!), предлагается подумать, почему они отсутствуют в приведенной выше классификации…

Из утверждения 2 теоремы 4 вытекает (выведите — это полезное упражнение!), что теорема 6 эквивалентна следующему утверждению:

Теорема 6'. *Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}$ характеристики, не равной 2, и D — симметрическая билинейная форма на V. Тогда существует базис $e_1, \dots, e_n \in V$ такой, что $D(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. При этом если $k = \operatorname{rk} D$, то $D(e_1, e_1), \dots, D(e_k, e_k) \neq 0$ и $D(e_{k+1}, e_{k+1}) = \dots = D(e_n, e_n) = 0$.*

Доказательство теоремы 6'. Доказательство индукцией по размерности $\dim V$ пространства V. Если $B \equiv 0$, то подходит любой базис. В противном случае существует вектор $e_1 \in V$, для которого $Q_B(e_1) = B(e_1, e_1) \neq 0$ — иначе (если $Q_B \equiv 0$) получается $B \equiv 0$ в силу формулы поляризации (выражающей симметрическую билинейную форму через квадратичную).

Рассмотрим отображение $\alpha : V \to \mathbb{F}$, заданное формулой $\alpha(v) = B(v, e_1)$. Это линейный функционал (потому что B — билинейная форма), не равный тождественно нулю (потому что $\alpha(e_1) \neq 0$). Тогда множество $\operatorname{Ker} \alpha = \{v \in V \mid B(v, e_1) \neq 0\}$ — гиперплоскость, то есть векторное пространство размерности $\dim V - 1$. По предположению индукции в $\operatorname{Ker} \alpha$ имеется базис $e_2, \dots, e_n$ такой, что $B(e_i, e_j) = 0$ для всех $2 \leq i \neq j \leq n$. Очевидно, $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} \alpha$, откуда вытекает, что ранг ограничения формы B на $\operatorname{Ker} \alpha$ равен $\operatorname{rk} B|_V - 1$ — следовательно, по предположению индукции, $B(e_2, e_2), \dots, B(e_k, e_k) \neq 0$ и $B(e_{k+1}, e_{k+1}) = \dots = B(e_n, e_n) = 0$.

В то же время $B(e_1, e_i) = 0$ для любого $i \neq 1$, поскольку $e_i \in \operatorname{Ker} \alpha$. Вектор e_1 не лежит в $\operatorname{Ker} \alpha$ и, тем самым, линейно независим от $e_2, \dots, e_n$. Отсюда следует (почему?), что $e_1, \dots, e_n$ — искомый базис в V. □

Базис $e_1, \dots, e_n$ и набор констант $c_1, \dots, c_n$ для формы D не единственный. Имеет, однако, место такое утверждение, уточняющее теорему 6':

Теорема 7. *Пусть D — симметрическая билинейная форма на конечномерном пространстве V и $e_1, \dots, e_n$ — базис в D, для которого $D(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Пусть также $D(e_1, e_1), \dots, D(e_k, e_k) \neq 0$ и $D(e_{k+1}, e_{k+1}) = \dots = D(e_n, e_n) = 0$. Тогда $k = \operatorname{rk} D$.*

Доказательство. Из условия сразу следует, что $e_{k+1}, \dots, e_n \in \operatorname{Ker} D$. Если $v = v_1 e_1 + \dots + v_k e_k + v_{k+1} e_{k+1} + \dots + v_n e_n \in \operatorname{Ker} D$, то для всякого $1 \leq i \leq k$ имеем $v_i B(e_i, e_i) = B(e_i, v) = 0$. Поскольку $B(e_i, e_i) \neq 0$ $(i \leq k!)$, отсюда следует, что $v_i = 0$. Тем самым $e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в $\operatorname{Ker} D$, то есть $\operatorname{rk} D = n - \dim \operatorname{Ker} D = k$. □

Аналогичная теорема для кососимметрических форм проще:

Теорема 8. *Ранг кососимметрической билинейнейной формы B на пространстве $\mathbb{F}^n$ — четное число $2k \leq n$. Форма B линейно эквивалентна форме C, заданной формулой*

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} u_{2k-1} & u_{2k} \\ v_{2k-1} & v_{2k} \end{vmatrix} \\ &= u_1 v_2 - u_2 v_1 + u_3 v_4 - u_4 v_3 + \dots + u_{2k-1} v_{2k} - u_{2k} v_{2k-1}; \end{aligned}$$

здесь $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Теорема 8 может быть переформулирована так:

Теорема 8'. *Пусть D — кососимметрическая билинейная форма на n-мерном пространстве V. Тогда ранг D равен четному числу $2k$, и в V имеется базис $e_1, \dots, e_k, h_1, \dots, h_k, u_{2k+1}, \dots, u_n$ такой, что $D(e_i, h_i) = -D(h_i, e_i) = 1$, а остальные элементы матрицы формы D в этом базисе равны нулю.*

Эквивалентность теорем 8 и 8' следует, как и эквивалентность теорем 6 и6', из утверждения 2 теоремы 4.

Доказательство теоремы 8'. Если $D \equiv 0$ (т.е. $\operatorname{rk} D = 0$), то теорема верна — можно взять любой базис в V в качестве $u_1, \dots, u_n$. Если $D \not\equiv 0$, то найдутся векторы e_1 и y_1 такие, что $D(e_1, y_1) \neq 0$. Тогда положим по определению $h_1 = y_1 / D(e_1, y_1)$, что дает $D(e_1, h_1) = -D(h_1, e_1) = 1$. Векторы e_1 и h_1 линейно независимы: если $\alpha e_1 + \beta h_1 = 0$, то $0 = D(e_1, \alpha e_1 + \beta h_1) = \beta$ (поскольку $D(e_1, e_1) = 0$ в силу косой симметрии) и $0 = -D(h_1, \alpha e_1 + \beta h_1) = \alpha$.

Рассмотрим теперь пространство $W = \{v \in V \mid D(e_1, v) = D(h_1, v) = 0\}$. Двумерное пространство, порожденное векторами e_1 и h_1, пересекается с W только по нулевому вектору: действительно, если $\alpha e_1 + \beta h_1 \in W$, то $\alpha = \beta = 0$ доказывается точно так же, как выше — линейная независимость. Из этого следует, что $\operatorname{Ker} D \subset W$, так что $\operatorname{rk} D|_W = \operatorname{rk} D - 2$. Теперь по предположению индукции в пространстве W существует такой базис $e_2, \dots, e_k, h_2, \dots, h_k, u_{2k+1}, \dots, u_n \in W$, что $D(e_i, h_i) = -D(h_i, e_i) = 1$ для всех $i = 2, \dots, k$, а остальные матричные элементы D в этом базисе равны нулю. Поскольку e_1, h_1 линейно независимы и $\langle e_1, h_1 \rangle \cap W = \{0\}$, векторы $e_1, \dots, e_k, h_1, \dots, h_k, u_{2k+1}, \dots, u_n$ — искомый базис в V. □

Следствие 9. *Две билинейные кососимметрические формы B_1, B_2 на конечномерном пространстве эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.*