ЛЕКЦИЯ 12 (ОКОНЧАНИЕ)

Аннотация. Приведение симметрических билинейных форм к каноническому виду и проективная классификация квадрик над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

В первой части лекции мы доказали, что кососимметрические билинейные формы на конечномерном пространстве над полем $\mathbb{F}$ классифицируются (с точностью до линейной эквивалентности) одним числом — рангом. С симметрическими билинейными формами ситуация сложнее: классификация этих форм с точностью до линейной эквивалентности зависит от свойств поля $\mathbb{F}$.

Теорема 9. *Пусть V — конечномерное пространство над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Тогда две симметрические билинейные формы B и B' линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.*

Доказательство. Эквивалентные билинейные формы (даже не обязательно симметрические) имеют одинаковый ранг согласно следствию 5. Пусть теперь $\operatorname{rk} B = k$. Согласно теореме 6', в пространстве V существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что $B(e_i, e_i) \stackrel{\text{def}}{=} c_i \neq 0$ при $1 \leq i \leq k$ и $B(e_i, e_i) = 0$ при $k+1 \leq i \leq n$, а также $B(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Пусть $t_i \in \mathbb{C}$ — число, для которого $t_i^2 = 1/c_i$, $i = 1, \dots, k$, и пусть $h_1 = t_1 e_1, \dots, h_k = t_k e_k, h_{k+1} = e_{k+1}, \dots, h_n = e_n$. Тогда матрица формы B в базисе $h_1, \dots, h_n$ такая: $B(h_i, h_i) = 1$ при $1 \leq i \leq k$, а остальные матричные элементы нулевые. Поскольку B' имеет такой же ранг k, для нее найдется базис $h'_1, \dots, h'_n \in V$, в котором она имеет такую же матрицу. Теперь эквивалентность B и B' вытекает из утверждения 2 теоремы 4. $\square$

Ключевой момент в доказательстве теоремы 9 — существование, для каждого $c_i \in \mathbb{C}$, числа $t_i \in \mathbb{C}$, квадрат которого равен $1/c_i$. В поле $\mathbb{R}$ такое число существует не всегда (квадратный корень извлекается только из положительных чисел), поэтому классификация симметрических билинейных (и, тем самым, квадратичных) форм более сложная.

Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^n$ симметрическую билинейную форму C, заданную формулой (1). Имеет место следующая техническая лемма:

Лемма 10. *Количество положительных чисел среди $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ равно наибольшей размерности подпространства $W \subset V$ такого, что ограничение $C|_W$ положительно определено.*

Лемму мы докажем чуть позднее, а пока выведем из нее теорему о классификации симметрических билинейных форм над полем $\mathbb{R}$.

Следствие 11 (принцип инерции Сильвестра)**.** *Пусть билинейная симметрическая форма B на $\mathbb{R}^n$ линейно эквивалентна форме C, заданной формулой* (1)*. Тогда количество положительных, отрицательных и нулевых чисел среди $c_1, \dots, c_n$ не зависит от выбора формы C, линейно эквивалентной B.*

Доказательство. Наибольшая размерность подпространства, ограничение на которое формы B положительно определено, равна таковой для любой формы C, линейно эквивалентной B, то есть количеству p положительных чисел среди $c_1, \dots, c_n$ — тем самым, p не зависит от выбора формы C. Для количества q отрицательных чисел рассуждение аналогичное. Количество нулей среди $c_1, \dots, c_n$ равно $n - p - q$. $\square$

Пара (p, q), где p — количество положительных, а q — отрицательных среди чисел $c_1, \dots, c_n$, называется сигнатурой формы B (эквивалентной C), а их разность $p - q$ — индексом инерции формы. (Сумма $p + q$ равна, как следует из общей теоремы 6, рангу формы B.)

Теорема 12. *Симметрические билинейные формы B и B' на конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую сигнатуру (или, что равносильно, одинаковый ранг и одинаковый индекс инерции).*

Доказательство. Если две формы B и B' линейно эквивалентны, и B эквивалентна C, заданной формулой (1), то B', по транзитивности, тоже эквивалентна C и, следовательно, сигнатуры B и C совпадают.

Обратно, пусть (p, q) — сигнатура B и B'. Тогда в пространстве B существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что $B(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$, а набор чисел $B(e_i, e_i) \stackrel{\text{def}}{=} c_i$ удовлетворяет неравенствам $c_1, \dots, c_p > 0$, $c_{p+1}, \dots, c_{p+q} < 0$ и $c_{p+q+1} = \dots = c_n = 0$ (напомним, что $p + q = \operatorname{rk} B$). Пусть $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ — числа, удовлетворяющие равенству $t_i^2 = 1/c_i$, также $t_{p+1}, \dots, t_{p+q} \in \mathbb{R}$ — числа, удовлетворяющие равенству $t_i^2 = -1/c_i$. Тогда матрица формы B в базисе $h_1 = t_1 e_1, \dots, h_{p+q} = t_{p+q} e_{p+q}, h_{p+q+1} = e_{p+q+1}, \dots, h_n = e_n$ такова: $B(h_i, h_i) = 1$ при $1 \leq i \leq p$, $B(h_i, h_i) = -1$ при $p + 1 \leq i \leq p + q$, а все остальные матричные элементы равны нулю. Поскольку форма B' имеет ту же сигнатуру (числа p и q), для нее также существует базис, в котором она имеет такую матрицу. Тогда B и B' линейно эквивалентны согласно утверждению 2 теоремы 4. $\square$

Доказательство леммы 10. Пусть $c_1, \dots, c_p > 0$, $c_{p+1}, \dots, c_{p+q} < 0$ и $c_{p+q+1} = \dots = c_n = 0$. Ограничение формы C на подпространство, порожденное векторами $e_1, \dots, e_p$, положительно определено: если $v = v_1 e_1 + \dots + v_p e_p$, то $B(v,v) = c_1 v_1^2 + \dots + c_p v_p^2 > 0$, если $(v_1, \dots, v_p) \neq (0, \dots, 0)$.

С другой стороны, пусть $W \subset V$ — подпространство, ограничение формы C на которое положительно определено, и $\dim W > p$. Рассмотрим пространство U, порожденное векторами $e_{p+1}, \dots, e_n$. Имеем $\dim U = n - p$. Линейная оболочка $\langle W \cup U \rangle = V$, откуда $\dim(W \cap U) = \dim W + \dim U - \dim\langle W \cup U \rangle > 0$, то есть пересечение $W \cap U$ содержит вектор $v \neq 0$. Но тогда $v = v_{p+1} e_{p+1} + \dots + v_n e_n$ (поскольку $v \in U$ и, следовательно, $C(v,v) = c_{p+1} v_{p+1}^2 + \dots + c_n v_n^2 \leq 0$, что противоречит тому, что $v \in W$, а ограничение C на подпространство W положительно определено. Значит, наибольшая размерность подпространства, ограничение C на которое положительно определено, равна p. $\square$

Определение 13. *Квадратичным конусом* в векторном пространстве V, соответствующим квадратичной форме $Q : V \to \mathbb{F}$, называется множество $K_Q \stackrel{\text{def}}{=} Q^{-1}(0) = \{v \in V \mid Q(v) = 0\}$.

Как нетрудно видеть, квадратичный конус действительно является конусом: если $v \in K_Q$, то $tv \in K_Q$ для всякого $t \in \mathbb{F}$: если $Q(v) = 0$, то $Q(tv) = t^2 Q(v) = 0$. Таким образом, если квадратичный конус пересекается с одномерным векторным подпространством в V — прямой, проходящей через нуль — в какой-нибудь точке, кроме нуля, то он содержит эту прямую целиком. Тем самым корректно определена проективизация $C_Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}K_Q \subset \mathbb{P}V$ — множество прямых, лежащих в конусе. Эта проективизация называется *проективной квадрикой*; в случае $\dim \mathbb{P}V = 2$ — *коникой*. Пересечение проективной квадрики (или коники) с аффинным пространством $L = \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$, где $W \subset V$ — гиперплоскость (“бесконечно удаленная”), называется аффинной квадрикой (соотв., коникой).

Будем называть квадратичные формы Q и Q' линейно эквивалентными, если существует обратимый линейный оператор $A : V \to V$ такой, что $Q'(v) = Q(Av)$ для всех $v \in V$. Если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, то это равносильно линейной эквивалентности соответствующих симметрических билинейных форм.

Теорема 14. *Если квадратичные формы Q_1 и Q_2 линейно эквивалентны, то проективные квадрики C_{Q_1} и C_{Q_2} проективно эквивалентны (т.е. переводятся друг в друга проективным преобразованием).*

Доказательство. Если $Q_2 = \mu_A(Q_1)$, то $C_{Q_1} = \mathbb{P}A(C_{Q_2})$. $\square$

Обратное утверждение может быть неверным — точнее говоря, верно ли оно, зависит от свойств поля $\mathbb{F}$. Чтобы разобраться в этом вопросе, изучим вначале пересечения квадрик с прямыми.

Лемма 15. *Любая прямая в $\mathbb{F}P^n$ либо целиком лежит в квадрике C_Q, либо имеет с нею не более двух общих точек. Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то хотя бы одна общая точка существует.*

Доказательство. Пусть $\tilde{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_0, \dots, a_n), \tilde{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{F}^{n+1}$ — два линейно независимых (в частности, ненулевых) вектора; содержащие их прямые мы тоже будем обозначать $a = [a_0 : \dots : a_n]$ и $b[b_0 : \dots : b_n] \in \mathbb{F}P^n$. Проективная прямая ℓ, проведенная через точки a и b в $\mathbb{F}P^n$, это проективизация плоскости $\tilde{\ell}$, порожденной векторами a и b в $\mathbb{F}^{n+1}$, то есть это $\ell = \{ta + sb \stackrel{\text{def}}{=} [ta_0 + sb_0 : \dots : ta_n + sb_n] \mid (t,s) \in \mathbb{F}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$.

Пусть $Q = Q_B$ — квадратичная форма на пространстве $\mathbb{F}^{n+1}$, соответствующая симметрической билинейной форме B. Точка $ta + sb \in \ell$ принадлежит квадрике C_Q, если $Q(t\tilde{a} + s\tilde{b}) = 0$, то есть

$$t^2 Q(\tilde{a}) + 2ts B(\tilde{a}, \tilde{b}) + s^2 Q(\tilde{b}) = 0. \tag{2}$$

Возможны следующие случаи:

1. $Q(\tilde{a}) \neq 0$, то есть $a \notin C_Q$. В этом случае точки $(t, 0)$ не являются решением уравнения (2), и уравнение можно привести к виду
$$Q(\tilde{a})(t/s)^2 + 2B(\tilde{a}, \tilde{b})(t/s) + Q(\tilde{b}) = 0. \tag{3}$$
Это — квадратное уравнение (старший коэффициент не равен нулю) относительно t/s, так что оно имеет не более 2 корней, что соответствует (почему?) не более чем двум точкам пересечения прямой и квадрики. То же самое — если $Q(\tilde{b}) \neq 0$.
2. $Q(\tilde{a}) = Q(\tilde{b}) = 0$, но $B(\tilde{a}, \tilde{b}) \neq 0$ (напомним, что мы всегда считаем, что характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2). Тогда уравнение имеет вид $B(\tilde{a}, \tilde{b})ts = 0$ и имеет 2 решения с точностью до пропорциональности: $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тем самым прямая ℓ имеет две точки пересечения с квадрикой, и это a и b.
3. $Q(\tilde{a}) = Q(\tilde{b}) = B(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0$. Тогда прямая ℓ целиком лежит в квадрике.

Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то квадратное уравнение (3) в случае 1 обязательно имеет корень, так что прямая пересекается с квадрикой; для других полей (например, для $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) пересечения может и не быть. В остальных случаях пересечение имеется при любом $\mathbb{F}$.

Замечание 1. Заметим также, что если квадратное уравнение (3) имеет единственный корень $t/s = u$, то этот корень двукратный. Это означает (докажите!), что ограничение однородного квадратичного многочлена Q на двумерное пространство $\tilde{\ell}$ является, с точностью до множителя, квадратом линейного функционала: $Q(t\tilde{a} + s\tilde{b}) = const. \cdot (t - us)^2$.

$\square$

Прямая, имеющая с квадрикой ровно одну общую точку или целиком лежащая в квадрике, называется касательной к этой квадрике (а общая точка, если она единственная, — точкой касания). Пусть $a \in C_Q$, то есть $Q(\tilde{a}) = 0$. В этом случае пересечение прямой ℓ, проведенной через точки a и b, с квадрикой, задается уравнением (2), которое в данном случае выглядит как $s(2B(\tilde{a}, \tilde{b})t + Q(\tilde{b})s) = 0$. Одно его решение это $(t, 0)$, что соответствует точке a. При $B(\tilde{a}, \tilde{b}) \neq 0$ имеется второе решение $t = Q(\tilde{b})s/(2B(\tilde{a}, \tilde{b}))$. Тем самым прямая ℓ — касательная к квадрике тогда и только тогда, когда точка $b = \mathbb{P}\tilde{b}$ удовлетворяет уравнению $B(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0$.

Отображение $\alpha(\tilde{b}) = B(\tilde{a}, \tilde{b})$ — линейный функционал. Если $\tilde{a} \notin \operatorname{Ker} B$, то $\alpha \neq 0$, и множество точек $b = \mathbb{P}\tilde{b} \in \mathbb{F}P^n$, для которых $\alpha(\tilde{b}) = 0$ — проективная гиперплоскость. Эта гиперплоскость называется касательной к квадрике в точке a и обозначается $T_a C_Q$; прямая ℓ, тем самым, касается квадрики тогда и только тогда, когда она лежит в касательной гиперплоскости. В этом случае $a \in C_Q$ называется точкой гладкости. Заметим, что если форма B невырожденная (т.е. $\operatorname{Ker} B = \{0\} \subset \mathbb{F}^{n+1}$, или $\operatorname{rk} B = n$), то все точки квадрики $C_Q \subset \mathbb{F}P^n$ являются точками гладкости.

Если $\tilde{a} \in \operatorname{Ker} B$, то $\alpha = 0$; тем самым любая точка $b \in \mathbb{F}P^n$ удовлетворяет уравнению $B(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0$, и любая прямая, проходящая через точку a, касается квадрики C_Q. В этом случае a называется точкой негладкости квадрики. Если форма B вырожденная, то ядро $\operatorname{Ker} B \subset \mathbb{F}^{n+1}$ содержит точку $\tilde{a} = (a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$; тогда $Q(\tilde{a}) = B(\tilde{a}, \tilde{a}) = 0$. Это означает, что точка $a = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{F}P^n$ лежит на квадрике C_Q и является ее точкой негладкости — тем самым всякая квадрика, соответствующая вырожденной квадратичной форме, имеет такую точку. Отметим еще раз, что приведенный анализ верен для любого поля $\mathbb{F}$ характеристики, отличной от 2.

В случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ это позволяет доказать такую лемму:

Лемма 16. *Пусть Q_1, Q_2 — квадратичные формы в $\mathbb{C}^{n+1}$. Проективные квадрики C_{Q_1} и C_{Q_2} совпадают тогда и только тогда, когда формы пропорциональны: существует $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ такое, что $Q_1 = \lambda Q_2$.*

Доказательство. В одну сторону лемма очевидна: если $Q_2 = \lambda Q_1$, где $\lambda \neq 0$, то $C_{Q_1} = C_{Q_2}$.

Для доказательства в другую сторону обозначим для краткости $C \stackrel{\text{def}}{=} C_{Q_1} = C_{Q_2}$. Если $C = \mathbb{C}P^n$, то $Q_1 = Q_2 = 0$ и лемма верна. Если $C \neq \mathbb{C}P^n$, то пусть точка $a \in \mathbb{C}P^n$ не лежит на квадрике: $Q_1(\tilde{a}) \neq 0 \neq Q_2(\tilde{a})$. Обозначим $\lambda = Q_1(a)/Q_2(a)$ и рассмотрим квадратичную форму $R = Q_1 - \lambda Q_2$ и квадрику C_R. Очевидно, $C \subset C_R$, причем включение собственное, т.к. $a \in C_R$, но $a \notin C$.

Согласно лемме 15 каждая прямая ℓ, проходящая через a, пересекает C в одной или двух точках. Эти точки лежат также на квадрике C_R, но на той же прямой имеется еще одна точка пересечения с C_R — точка a. Следовательно, если прямая ℓ не касается квадрики C, то она имеет с C_R не меньше трех общих точек. Из леммы 15 вытекает, что в этом случае $\ell \subset C_R$.

Если прямая ℓ касается квадрики C в точке b, то, согласно замечанию 1, $Q_1|_{\tilde{\ell}}(t\tilde{a} + s\tilde{b}) = c_1 t^2$ и $Q_2|_{\tilde{\ell}}(t\tilde{a} + s\tilde{b}) = c_2 t^2$ для некоторых констант $c_1, c_2 \neq 0$. Тогда $R|_{\tilde{\ell}}(t\tilde{a} + s\tilde{b}) = ct^2$, где $c = c_1 - \lambda c_2$. Поскольку $a \in C_R$, константа $c = 0$, и опять-таки получаем, что $\ell \subset C_R$.

Тем самым квадрика C_R содержит все прямые, проходящие через точку a — следовательно, она совпадает с $\mathbb{C}P^n$. Это означает, что $R = 0$, то есть $Q_2 = \lambda Q_1$. $\square$

Пример 1. Над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ аналог леммы 16 отсутствует: квадратичные формы $Q_1(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ и $Q_2(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ в $\mathbb{R}^2$ не пропорциональны, но $C_{Q_1} = C_{Q_2} = \{[1 : 0 : 0]\} \subset \mathbb{R}P^2$ (точка).

При $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ теперь можно доказать утверждение, обратное к теореме 14:

Теорема 17. *Если квадрики C_{Q_1} и C_{Q_2} в пространстве $\mathbb{C}P^n$ проективно эквивалентны, то квадратичные формы Q_1 и Q_2 в $\mathbb{C}^{n+1}$ линейно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть квадрики C_{Q_1} и C_{Q_2} проективно эквивалентны: $C_{Q_1} = (\mathbb{P}A)(P_{Q_2})$, где $A : V \to V$ — обратимое линейное отображение. Обозначим $Q(v) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_A(Q_2)$; тогда Q — квадратичная форма того же ранга, что и Q_2, и квадрики C_{Q_1} и C_Q совпадают. По лемме 16 формы Q и Q_1 пропорциональны: $Q = \lambda Q_1$, где $\lambda \neq 0$. Над полем $\mathbb{C}$ пропорциональные формы линейно эквивалентны: $\lambda Q_1(v) = Q_1(\sqrt{\lambda} v)$. Следовательно, форма Q_1 линейно эквивалентна $Q = \mu_A(Q_2)$, то если линейно эквивалентна Q_2. $\square$