5. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Напомним, что набор точек $a_0, \dots, a_n \in L$ в n-мерном аффинном пространстве называется аффинным репером, если векторы $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ — базис в векторном пространстве V.

Задача 1. Пусть $a_0, \dots, a_n \in L$ — аффинный репер. Докажите теорему 4 лекции 5: если переставить произвольным образом точки этого репера, то барицентрические координаты произвольной точки b переставятся так же: $b \stackrel{\text{def}}{=} x_0 a_0 + \dots + x_n a_n = x_{\sigma(0)} a_{\sigma(0)} + \dots + x_{\sigma(n)} a_{\sigma(n)}$.

Задача 2. Барицентрические координаты точки a_4 на плоскости по отношению к точкам a_1, a_2, a_3 равны x_1, x_2, x_3. Чему равны барицентрические координаты точки a_1 по по отношению к точкам a_2, a_3, a_4? В каком отношении точка пересечения отрезков a_1a_3 и a_2a_4 делит каждый из них?

Задача 3. Докажите теорему из школьной программы: в трапеции $ABCD$ середины оснований AD и BC, точка пересечениея диагоналей AC и BD и точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD лежат на одной прямой. Пользоваться расстояниями, углами и площадями при доказательстве запрещается. Верна ли теорема на аффинной плоскости над произвольным полем? Что она означает геометрически над полем комплексных чисел?

Задача 4. В пятиугольнике $abcde$ стороны ab, bc, cd и de параллельны противолежащим диагоналям ce, ad, be и ac соответственно. Докажите, что а) сторона ae также параллельна противолежащей диагонали bd, б) отношение длины стороны к длине противолежащей диагонали одинаково для всех пяти сторон, и вычислите это отношение.

Задача 5. а) Эллипс — плоская кривая, задаваемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Пусть pq — хорда эллипса (отрезок с концами на эллипсе), проходящая через начало координат. Докажите, что середины всех хорд эллипса, параллельных pq, образуют хорду rs, проходящую через начало координат, а середины всех хорд, параллельных rs, лежат на хорде pq. б) Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для гиперболы — плоской кривой, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.