5А. КВАЗИАФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. (ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ЛИСТОК)

Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле.

Задача 1 (технические вопросы)**.** а) Пусть L — аффинное пространство над произвольным полем $\mathbb{F}$. Что означает фраза для "точки $a, b, c \in L$ лежат на одной прямой"? В случае $L = \mathbb{F}^n$ опишите координаты всех точек прямой $\ell \subset \mathbb{F}^n$, проходящей через точки $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$. б) Центром тяжести точек a и b назовем точку $c \in \mathbb{F}^n$ такую, что $c - a = b - c$. Для каких полей $\mathbb{F}$ верно, что центр тяжести любых двух точек $a, b \in L$ существует и единствен? В случае $L = \mathbb{F}^n$ найдите координаты точки c явно. в) Пусть $a, b, c, d \in L$. Докажите, что векторы $b - a$ и $d - c$ равны тогда и только тогда, когда центр тяжести точек a и d совпадает с центром тяжести точек b и c.

Отображение $f : L \to L$ называется квазиаффинным, если образы любых трех точек $a, b, c \in L$, лежащих на одной прямой, лежат на одной прямой, но образ $f(L) \subset L$ всего отображения f не является подмножеством прямой. (Тем самым L само не должно быть прямой — размерность n векторного пространства V, которому параллельно L, должна быть не меньше 2.)

Задача 2. а) Докажите, что квазиаффинное преобразование f переводит центр тяжести точек $a, b \in L$ в центр тяжести точек $f(a)$ и $f(b)$. б) Докажите, что квазиаффинное преобразование является полуаффинным, т.е. переводит равные векторы в равные: если $b - a = d - c$, то $f(b) - f(a) = f(d) - f(c)$. в*) Всякое ли полуаффинное преобразование является квазиаффинным?

Задача 3. Пусть $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ — квазиаффинное преобразование (напомним, что $n \geq 2$), переводящее точку $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^n$ в себя, и пусть $f(e_i) \stackrel{\text{def}}{=} a_i$, где $e_i \stackrel{\text{def}}{=} (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (1 стоит на i-ом месте, $1 \leq i \leq n$). а) Докажите, что для всякого $i = 1, \dots, n$ существует такое отображение $\varphi_i : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, что $f(te_i) = \varphi_i(t)a_i$ для всякого $t \in \mathbb{F}$. б) Докажите, что φ_i одинаково для всех $i = 1, \dots, n$: $\varphi_1 = \dots = \varphi_n \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$. в) Докажите, что $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — автоморфизм поля: $\varphi(s + t) = \varphi(s) + \varphi(t)$ и $\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t)$ для всех $s, t \in \mathbb{F}$.

Задача 4. а) Пусть $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ — автоморфизм поля. Докажите, что $\varphi = \mathrm{Id}$. б) Пусть $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — автоморфизм поля. Докажите, что если $t > 0$, то $\psi(t) > 0$. в) Докажите, что $\psi = \mathrm{Id}$. г) Пусть $\xi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — автоморфизм поля, для которого $\xi|_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}$. Докажите, что либо $\xi = \mathrm{Id}$, либо $\xi(z) = \overline{z}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Из задачи 4в вытекает, что квазиаффинное отображение аффинного пространства над $\mathbb{R}$ является аффинным.