7. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ОБЪЕМЫ.

Задача 1. Найдите площадь параллелограмма $OACB \subset \mathbb{R}^3$, где O — начало координат, а векторы $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$. Можно ли в данном случае определить ориентированную площадь? (то есть непрерывную функцию двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^3$, обладающую свойствами ориентированного объема, модуль которой равен площади параллелограмма со сторонами a и b)

Задача 2. Известно, что произвольная прямая ℓ на плоскости, параллельная оси абсцисс, пересекает параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ по отрезкам одинаковой длины (возможно, нулевой). Докажите, что площади параллелограммов равны.

Задача 3. Докажите, что определитель верхнетреугольной матрицы (и нижнетреугольной тоже) равен произведению ее диагональных элементов.

Задача 4. Докажите, что $\det A = \det A^T$, где A^T — транспонированная матрица A (A^T получается из A отражением относительно главной диагонали, то есть элемент матрицы A^T на пересечении i-й строки и j-го столбца равен a_{ji} — элементу матрицы A на пересечении j-й строки и i-го столбца).

Задача 5. а) Докажите, что $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \pm \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$; какой там в точности знак? б) Докажите, что $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} a_1$. в) Вычислите

$$\det \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, имеющее в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0 \dots . 1)$ матрицу (a_{ij}), $1 \le i, j \le n$. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный параллелепипед (т.е. $\Pi = \{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \mid 0 \le t_1, \dots, t_n \le 1\}$, где $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ — какие-то векторы). Докажите, что отношение объемов $\operatorname{Vol}(A(\Pi)) / \operatorname{Vol}(\Pi)$ равно $|\det A|$.

Задача 7. а) Пусть e_1, e_2, e_3 — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$, и $\Pi = \{t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 \mid 0 \le t_1, t_2, t_3 \le 1\}$ — куб. Рассмотрим множество $Q_1 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \Pi \mid t_2, t_3 \le t_1\} \subset \Pi$ и аналогично Q_2, Q_3. Нарисуйте разбиение куба на Q_1, Q_2, Q_3 и докажите, что объемы множеств Q_1, Q_2, Q_3 одинаковы (и равны 1/3). б) Тот же вопрос, но $e_1 = (a, 0, 0)$, $e_2 = (0, b, 0)$, $e_3 = (0, 0, c)$ (а Π, соответственно, — прямоугольный паралллелепипед с ребрами a, b, c). в) Тот же вопрос, но e_1, e_2, e_3 — произвольный базис.

Указание. Множества Q_1, Q_2, Q_3 — не параллелепипеды (а что?), так что, формально говоря, в курсе линейной алгебры и геометрии их объем не определялся. Это неважно — пользуйтесь здравым смыслом и школьными знаниями об объемах.