8–ε. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ.

Задача 1. Докажите, что двойное отношение $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_1-x_4)(x_2-x_3)}$ корректно определено (но может быть равно ∞), если точки $x_1, \ldots, x_4$ совпадают не более чем попарно (т.е. для каждого $t \in \mathbb{F}P^1$ существует не более двух индексов $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ таких, что $x_i = t$). Также покажите, что если совпадают три точки, то двойное отношение корректно определить невозможно. Чему равны двойные отношения (t, t, s, s), (t, s, t, s) и (t, s, s, t), где $t \neq s$? (но возможно $t = \infty$ или $s = \infty$)

Задача 2. а) Пусть $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t$. Вычислите (x_2, x_1, x_3, x_4), (x_3, x_2, x_1, x_4) и (x_4, x_2, x_3, x_1). б) Обобщение: пусть $\sigma \in S_4$ (перестановка). Докажите, что двойное отношение $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})$ зависит только от t и является линейной или дробно-линейной функцией от t; обозначим эту функцию $f_\sigma(t)$. в) Докажите, что отображение $\sigma \mapsto f_\sigma$, определенное в пункте 2б — гомоморфизм группы S_4 в группу $\mathrm{PGL}(1, \mathbb{F})$ дробно-рациональных функций (с операцией композиции). Опишите образ этого гомоморфизма. Сколько функций он содержит? г) Опишите ядро гомоморфизма, описанного в пункте 2в.

Задача 3. а) Пусть $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Докажите, что двойное отношение (z_1, z_2, z_3, z_4) вещественно тогда и только тогда, когда точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной прямой или окружности. В каком случае двойное отношение — положительное число? б) Докажите, что дробно-линейное преобразование $\mathbb{C}$ переводит прямые и окружности в прямые и окружности (но может переводить прямые в окружности и наоборот). в) Докажите, что отображение $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ в себя, переводящее прямые и окружности в прямые и окружности, является либо дробно-линейным, либо композицией дробно-линейного и комплексного сопряжения.

Задача 4. а) Пусть p, q, r, s — прямые в $\mathbb{F}P^2$, пересекающиеся в одной точке o. Пусть ℓ, ℓ' — еще две прямые, пересекающие прямые p, q, r, s в точках a, b, c, d и a', b', c', d' соответственно. Докажите, что двойные отношения точек равны: $(a, b, c, d) = (a', b', c', d') \stackrel{\text{def}}{=} x$. б) Точки P, Q, R, S двойственной проективной плоскости, двойственные прямым p, q, r, s из пункта 4а, лежат на прямой O, двойственной точке o. Докажите, что двойное отношение точек $P, Q, R, S \in O$ равно x.