9. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: КВАДРИКИ И КОНИКИ.

Пусть V — векторное пространство размерности $n+1$ и $Q : V \to \mathbb{F}$ — квадратичная форма. Очевидно, что если $Q(v) = 0$, то $Q(tv) = 0$ для всех $t \in \mathbb{F}$, так что Q обращается в нуль сразу на всей прямой, содержащей v. Множество $C_Q \stackrel{\text{def}}{=} \{\ell \in \mathbb{P}V \mid Q|_\ell = 0\} = \{\langle v\rangle \in \mathbb{P}V \mid v \in V, Q(v) = 0\} \subset \mathbb{P}V$ называется проективной квадрикой. Очевидно, $C_Q = C_{tQ}$ для произвольного числа $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. В частности, если $V = \mathbb{F}^{n+1}$, квадратичная форма задается формулой $Q_A(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_ix_j = 0$; будем писать C_A вместо C_{Q_A} для соответствующей квадрики. Квадрика на проективной плоскости называется коникой.

Задача 1. Пусть $p^\vee \subset \mathbb{F}P^n$ — гиперплоскость, заданная формулой $p^\vee = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{F}P^n \mid p_0x_0 + \dots + p_nx_n = 0\}$ (иными словами, двойственная точке $p = [p_0 : \dots : p_n] \in (\mathbb{F}P^n)^*$). а) Пусть $p^\vee, q^\vee \subset \mathbb{F}P^n$ — две различные гиперплоскости. Докажите, что $p^\vee \cup q^\vee$ — проективная квадрика. б) Докажите, что квадрика C_A имеет вид $p^\vee \cup q^\vee$ тогда и только тогда, когда линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{F}^{n+1} \to \mathbb{F}^{n+1}$ с матрицей A в стандартном базисе имеет одномерный образ. Как по (однородным) координатам точек $p = [p_0 : \dots : p_n]$ и $q = [q_0 : \dots : q_n]$ написать матрицу A? Как по матрице A вычислить координаты точек p и q?

Пусть $B \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$ — симметрическая матрица $n \times n$ с элементами $(b_{ij})_{i,j=1}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$ — вектор, и $d \in \mathbb{F}$. Множество $Q_{B,c,d} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i,j=1}^n b_{ij}y_iy_j + \sum_{i=1}^n c_iy_i + d = 0\}$ называется аффинной квадрикой.

Задача 2. а) Пусть $\mathbb{F}P^n = \mathbb{F}^n \sqcup \mathbb{F}P^{n-1}$ — стандартное разбиение, и $C_A \subset \mathbb{F}P^n$ — проективная квадрика. Докажите, что $C_A \cap \mathbb{F}^n$ — аффинная квадрика или прямая или пустое множество; уточните, в каком именно случаае то, другое и третье. Как связаны матрица B, вектор c и константа d аффинной квадрики с матрицей A? б) Что представляет собой пересечение $Q_A \cap \mathbb{F}P^{n-1}$ квадрики с бесконечно удаленной гиперплоскостью? в) Докажите, что для всякой аффинной квадрики $Q_{B,c,d} \subset \mathbb{F}^n$ существует единственная проективная квадрика $Q_A \subset \mathbb{F}P^n$ такая, что $Q_{B,c,d} = Q_A \cap \mathbb{F}^n$.

Задача 3. Постройте проективное преобразование плоскости $\mathbb{R}P^2$, переводящее а) окружность $x^2 + y^2 = 1$ в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$; б) окружность в параболу $x^2 - y = 0$; в) параболу в гиперболу. Куда перейдут при этом бесконечно удаленные точки? Какие точки станут бесконечно удаленными? Докажите, что аффинных преобразований с такими свойствами не существует.

Указание. Под окружностью, гиперболой и т.п. на проективной плоскости понимаются проективные квадрики, пересечение которых с аффинной плоскостью (дополнением к бесконечно удаленной прямой) это окружность, гипербола и т.п. Ср. с задачей 2.

Задача 4. Докажите, что если коника и прямая либо имеют не более двух общих точек, либо прямая целиком лежит в конике.

Прямая, имеющая с коникой ровно одну общую точку или целиком в ней лежащая, называется касательной к конике. (Продумайте, что это означает в случае, когда коника вырожденная!) Если одна и та же прямая касается двух коник в одной и той же точке, то говорят, что коники касаются в этой точке.

Задача 5. а) Докажите, что если две коники над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ имеют конечное количество общих точек, то это количество не больше 4. б) Докажите, что если две коники над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ имеют нечетное количество общих точек, то в одной из этих точек они касаются. в) Докажите, что если две коники над $\mathbb{C}$ не касаются, то они имеют ровно 4 общих точки. Как это согласуется с тем, что две окружности на плоскости имеют не более двух общих точек?

Задача 6. а) Докажите, что множество точек $p \in (\mathbb{F}P^2)^*$, для которых прямая $p^\vee$ является касательной к невырожденной конике $Q \subset \mathbb{F}P^2$, образуют в $(\mathbb{F}P^2)^*$ невырожденную конику $Q^\vee$. Что происходит, если коника Q вырожденная? б) Докажите, что если коника Q невырождена, то коника, двойственная к $Q^\vee$, это Q (при стандартном отождествлении $\mathbb{F}P^2$ и $(\mathbb{F}P^2)^{**}$). в) Сколько общих касательных могут иметь две невырожденные коники в $\mathbb{F}P^2$ при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$? Докажите, что если это число нечетно, то коники касаются. г) Докажите, что если две коники над $\mathbb{C}$ не касаются, то они имеют 4 общих касательных.

Задача 7. а) Докажите теорему Паскаля: пусть $abcdef$ — шестиугольник, вершины которого лежат на конике Q. Тогда точки $ab \cap de$, $bc \cap ef$ и $cd \cap fa$ лежат на одной прямой. б) Выведите из теоремы Паскаля теорему Паппа. в) Докажите теорему Брианшона: пусть $abcdef$ — шестиугольник, все стороны которого ab, bc, cd, de, ef касаются коники Q. Тогда диагонали ad, be и cf пересекаются в одной точке. г) Выведите из теоремы Брианшона теорему, двойственную теореме Паппа.