ПРОГРАММА ЗАЧЕТА

Программа содержит приблизительные формулировки утверждений, доказательства которых необходимо знать. Предполагается, что сдающий зачет самостоятельно внесет необходимые уточнения, подберет нужные определения и вспомогательные утверждения (леммы). Знание фактов, не вошедших в эту программу — эрудиция — всячески приветствуется.

Программа состоит из вопросов и супервопросов (отмечены звездочкой). Супервопросы в целом не сложнее вопросов, но про них не рассказывали на лекциях. В квадратных скобках после супервопросов написано (иногда), где их посмотреть. Перед началом зачета сдающий должен сказать, хочет ли он, чтобы ему задавали супервопросы.

1. Система однородных линейных уравнений, содержащая больше неизвестных, чем уравнений, имеет ненулевое решение.
2. Пространство имеет конечный базис тогда и только тогда, когда оно конечномерно, причем любые два конечных базиса содержат одно и то же число элементов.
3. *Любое векторное пространство содержит базис (возможно, бесконечный). Любые два базиса имеют одинаковую мощность. [Это простое следствие леммы Цорна, см. любую книгу по теории множеств.]
4. Базис в подпространстве (*в том числе бесконечномерном) всегда можно дополнить до базиса в пространстве.
5. Размерность пересечения плюс размерность суммы (линейной оболочки объединения) двух подпространств равна сумме размерностей подпространств. *Аналог этой формулы в случае нескольких подпространств. [Это называется “формула включений и исключений”, написано много где.]
6. Отображение, ставящее в соответствие линейному отображению его матрицу — изоморфизм векторных пространств. Матрица композиции линейных отображений — произведение матриц.
7. Линейное отображение конечномерных пространств обратимо тогда и только тогда, когда переводит базис в базис.
8. Размерность пространства равна размерности двойственного пространства. Сумма размерностей пространства и его аннулятора равна размерности пространства.
9. $(AB)^* = B^*A^*$. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
10. Изоморфизм (*канонический) между пространством и двойственным к двойственному. Связь между оператором и двойственным к двойственному. [Канонический — потому что функтор. Что это такое — посмотрите начало какого-нибудь учебника по гомологической алгебре, или хоть Википедию.]
11. Ядро двойственного оператора — аннулятор образа оператора, а образ двойственного — аннулятор ядра оператора.
12. *Канонический изоморфизм между пространством, двойственным к подпространству, и фактором двойственного пространства по аннулятору подпространства. [В учебнике Кострикина–Манина есть про фактор-пространство векторного пространства.]
13. $\widetilde{f \circ g} = \widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ (для аффинных отображений). Обратимые аффинные преобразования образуют группу преобразований.
14. Отображение $f \mapsto \widetilde{f}$ — эпиморфизм групп преобразований (т.е. гомоморфизм, образ которого — вся группа). Его ядро состоит из параллельных переносов. *Группа аффинных преобразований изоморфна полупрямому произведению группы параллельных переносов и группы линейных преобразований.
15. Стабилизатор точки в группе аффинных преобразований изоморфен группе линейных преобразований. Нормализатор гиперплоскости в группе линейных преобразований изоморфен группе аффинных преобразований. *Стабилизатор ненулевого вектора в группе линейных преобразований изоморфен группе аффинных преобразований. [В пункте 18 аффинному преобразованию сопоставляется матрица $(n+1) \times (n+1)$, сумма элементов каждой строки которой равна 1. Это — матрица линейного оператора, переводящего вектор $(1, 1, \ldots, 1)$ в себя.]
16. Набор точек — аффинный репер тогда и только тогда, когда точки не лежат ни в каком собственном подпространстве, и тогда и только тогда, когда они образуют базис в векторном пространстве, содержащем аффинное в качестве гиперплоскости.
17. Отображение является аффинным тогда и только тогда, когда оно сохраняет коэффициенты барицентрической комбинации.
18. Для любых $n+1$ точек существует и единственно аффинное отображение, переводящее точки фиксированного аффинного репера в эти точки. *Множество аффинных отображений имеет структуру аффинного

пространства, а отображение, переводящее аффинное преобразование в матрицу $(n+1)\times(n+1)$, составленную из барицентрических координат образов точек репера, является аффинным изоморфизмом.

19. *Для любого квазиаффинного преобразования $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ существует автоморфизм $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ поля $\mathbb{F}$ такой, что для любого вектора $e \in \mathbb{F}^n$ и любого скаляра $t \in \mathbb{F}$ выполнено равенство $f(te) = \varphi(t)f(e)$. [Это задача листка 5А, см. также книгу Прасолова и Тихомирова.]
20. Теорема Каратеодори: всякая точка выпуклой оболочки множества в $\mathbb{R}^n$ является выпуклой комбинацией не более чем $(n+1)$ точек множества.
21. Теорема Радона: любые $(n+2)$ точки в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на две группы, выпуклые оболочки которых пересекаются.
22. Теорема Хелли: если в конечном наборе выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ любые $n+1$ пересекаются, то все пересекаются. *Теорема Хелли для бесконечного количества множеств, по крайней мере одно из которых — компакт. [Задача листка 6.]
23. Любой ориентированный объем в $\mathbb{F}^n$ пропорционален определителю.
24. Определитель произведения матриц равен произведению определителей. Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.
25. Формула для определителя через сумму по перестановкам.
26. Разложение определителя по строке и по столбцу. Формула для обратной матрицы через определители. Правило Крамера для решения систем линейных уравнений.
27. Определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса. *Квадрат модуля определителя линейного преобразования A пространства над полем $\mathbb{C}$ равен определителю того же преобразования того же пространства, но над полем $\mathbb{R}$. [Есть в книге Кострикина и Манина, раздел “Комплексификация и овеществление”.]
28. Проективизация линейного отображения — эпиморфизм из группы линейных преобразований в группу проективных преобразований, ядро которого состоит из кратных единичного оператора.
29. Нормализатор гиперплоскости в группе проективных преобразований — группа аффинных преобразований дополнения к этой гиперплоскости.
30. Для любых двух наборов $(n+2)$ точек общего положения существует единственное проективное преобразование, переводящее один набор в другой.
31. Теорема Дезарга: прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения $ab \cap a'b'$, $bc \cap b'c'$ и $ac \cap a'c'$ лежат на одной прямой.
32. *Теорема Паскаля: если $a_1, \ldots, a_6$ — точки на проективной конике, то точки пересечения $a_1a_2 \cap a_4a_5$, $a_2a_3 \cap a_5a_6$ и $a_3a_4 \cap a_1a_6$ лежат на одной прямой. [Задача листка 8; см. также пункт 34.]
33. Теорема Паппа: если точки a, b, c лежат на прямой, а точки a', b', c' — на другой прямой, то точки пересечения $ab' \cap a'b$, $bc' \cap b'c$ и $ac' \cap a'c$ лежат на одной прямой. *Теорема Паппа как частный случай теоремы Паскаля.
34. *Теорема о девяти точках: если 8 из 9 точек пересечения двух троек прямых лежат на проективной кубике (кривой, заданной уравнением $P([x_0 : x_1 : x_2]) = 0$, где P — однородный многочлен степени 3), то девятая точка тоже лежит на ней. Теорема Паскаля как следствие теоремы о девяти точках. [Как ни странно, без серьезных ошибок рассказано в Википедии.]
35. Преобразование проективной прямой тогда и только тогда является проективным, когда оно сохраняет двойное отношение.
36. Соответствие между симметрическими билинейными формами и квадратичными формами — изоморфизм векторных пространств. *Ситуация над полем характеристики 2.
37. Неравенство Коши–Буняковского (модуль скалярного произведения не превосходит произведения модулей) и неравенство треугольника.
38. *Критерий Сильвестра положительной определенности симметрической билинейной формы: определеители всех угловых подматриц матрицы формы должны быть положительны. [Есть абсолютно в любом учебнике линейной алгебры.]
39. Приведение симметрических билинейных форм над полем характеристики, отличной от 2, к диагональному виду.
40. *Приведение симметрических билинейных форм к стандартному виду в присутствии подпространства. [См. лекции НМУ по геометрии, весенний семестр 2019 года. Осторожно: много опечаток!]
41. Приведение кососимметрических билинейных форм к стандартному виду (к форме Дарбу).
42. Классификация квадратичных форм над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ с точностью до линейной эквивалентности.
43. Проективная классификация квадрик над полем $\mathbb{C}$.
44. *Аффинная классификация квадрик над полем $\mathbb{C}$. [Вытекает из классификации форм в пункте 40; подпространство — бесконечно удаленная гиперплоскость.]

Книги по геометрии

1. В.В.Прасолов, В.М.Тихомиров, *Геометрия*, М., МЦНМО, 2007.

2. А.И.Кострикин, Ю.И.Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, М., Наука, 1986 (и более поздние переиздания).