НМУ | Лекция 12 | Строение полупростых колец.

Мы в прошлом семестре занимались изучением теории комплексных пр-ий конечной группы, или $\mathbb{C}G$-модулями.

<u>Теорема</u> Машке — любой $\mathbb{K}G$ модуль полупрост $=\oplus$ неприводимых.

$\mathbb{K}$ — любое, так чтобы $(\mathrm{char}\,\mathbb{K}, \# G) = 1$.

Вопрос, а что если $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$, как изменится теория пр-ий.
Останется полупростота, но кол-во пр-ий может уменьшится:

<u>Пример 1.</u> $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p-простое

$$\mathbb{R}G = \mathbb{R}[x]/(x^p-1) = \mathbb{R}[x]/x-1 \oplus \mathbb{R}[x]/(x^2 - 2\cos\frac{2\pi k}{p} x + 1)$$

над $\mathbb{C}$ все пр-ия одномерны

где $x^2 - 2\cos\frac{2\pi k}{p} x - 1 = (x - e^{\frac{2\pi i k}{p}})\cdot(x - e^{-\frac{2\pi i k}{p}})$. — неприводимый мн-н.

<u>Пример 2</u> $G = Q_8$ $\quad \mathbb{R}Q_8$ имеет 4 одномерных пр-ия и 1 — 4-мерное

над $\mathbb{C}$ 4 - одномерных и 1 - двумерное

	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
$\mathbb{C}_+$					
$\mathbb{C}_-$					
$\mathbb{C}$					

Существенное различие над произвольным полем доставляет <u>лемма Шура</u>: M, N - неприводимые R-модули, тогда любой ненулевой г-зм обратим. (эндом)

$\Rightarrow$ $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G} M = \lambda \mathrm{Id}$ - поле

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}G} M$ — тело — (не)коммутативное кольцо с делением.

<u>Пример.</u> $\mathrm{End}_{\mathbb{R}Q_8}(M)$ — тело кватернионов: $(1, i, j, k)$.

<u>Опр.</u> Тело = кольцо с делением (division Ring).
Если тело коммутативно, то это поле,
и модули над телом D ведут себя как векторные пр-ва.
имеют базис, размерность, лин. комб и т.п.

Всё, что нужно — уметь решать С.Л.У. (=) работать с матрицами.

$M_n(D) = \{(d_{ij})\}$ $\qquad (A\cdot B)_{ik} := \sum_k a_{ik}\cdot b_{kj}$.

Теор. Алгебра $M_n(D)$ — полупроста, имеет единственное неприводимое пр-ие D^n.

Д-во: $M_n(D) \simeq \underbrace{D^n \oplus \ldots \oplus D^n}_{n}$ — разложение по столбцам.

D^n - неприводим, т.к. любой элемент можно дополнить до базиса, и любой вектор в любой другой.

Цель: Д-ть, что любая конечномерная полупростая алг-ра $/\mathbb{F}$

$A \simeq \oplus M_{n_i}(D_i)$, где D_i — тело $/\mathbb{F}$

и $D_1^{n_1}, \ldots, D_s^{n_s}$ — полный список неприводимых для A.

Д-во состоит из нескольких шагов, центральная теорема:

Пусть M — полупростой A-mod.

$B := \mathrm{End}_A(M)$, B — естественно действует на M

$C := \mathrm{End}_B(M)$, имеем $i: A \hookrightarrow C$.

$\boxed{\text{Теор. (плотности)}}$ Отображение $i: A \to C$ "плотно", то есть $\forall m\in M$ $\forall c \in C$ $\exists a\in A$ т.ч. $am = cm$.

Д-во: $M = Am \oplus N$ из полупростоты,

пусть $\pi: M \to Am$ — проектор вдоль N, тогда $\pi \rightsquigarrow e$ — идемпотент.

$e \in B$ $\qquad e^2 = e$, $e|_{Am} = \mathrm{Id}$, $e|_N = 0$.

Имеем $cm = c(\pi m) = e\,c(m) \in Am$. $\square$

Сл-ие Усиление теор. плотности:

$\forall m_1, \ldots, m_n \in M$, $\forall c\in C$ $\exists a \in A$ т.ч. $am_i = cm_i$.

Д-во: Р-м $M^n = M \oplus \ldots \oplus M$. и применим теор. плотности к нему и отобр. $(c, \ldots, c) \in \mathrm{End}_B(M^n)$.

Следствие (Теорема Веддербарна или т-ма о двойном централизаторе).

Пусть M — простой $\boxed{\text{точный}}$ A-модуль. (точный $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $A \hookrightarrow End_{\Bbbk}(M)$).

$D := End_A(M)$ и пусть M — конечномерен над D

(тело по лемме Шура), тогда $A \simeq End_D(M) = Mat_n(D)$.

Д-во: пусть $m_1, \dots, m_n$ — базис M над D.

имеем $\forall c \in End_D(M)$ $\exists a \in A$ т.ч. $cm_i = am_i$ $\Rightarrow A \to End_D(M)$ сюрьективно

$\Rightarrow \forall c \in End_D(M)$ $\exists a \in A$ т.ч. $c = a$.

инъективно, т.к. M-точный

Замечание Если $A /_{\mathbb{C}} \subset End_{\Bbbk}(M)$, то $A \simeq M_n(\Bbbk)$.

Рассмотрим общий случай:

Пусть A — полупростая (конечномерная) $\Bbbk$-алгебра.

т.е. A — полупрост, как левый A-mod.

Пусть $L_1, \dots, L_n$ — список неприводимых A-модулей.

$\Rightarrow A \simeq \underbrace{L_1 \oplus \dots \oplus L_1} \oplus L_2 \oplus \dots \quad + L_n$

Лемма Если M — неприводимый A-модуль, L — левый идеал в A.

тогда $\left[\begin{array}{l} L \simeq M \\ LM = 0 \end{array}\right.$.

Д-во: $ALM = LM \subset M \Rightarrow \left[\begin{array}{l} LM \simeq M \\ LM = 0 \end{array}\right.$, если $\exists m \in M$ т.ч. $Lm \neq 0$, то $\overset{0}{\cancel{}}$ $Lm \subset M$

$\Rightarrow L_m = M$. и мы имеем левый из-зм.

Сл-ие $L_i L_j = 0$, если $i \neq j$.

Пусть $A_i = +L_i$ — сумма всех идеалов изоморфных L_i.

тогда $A_i \subset A_i \cdot A \subset A_i \cdot (+L_j) = A_i(+L_i) = A_i \cdot A_i \subset A_i$.

$\Rightarrow A_i$ — двусторонний идеал.

Поскольку $\underset{\Psi}{A} \subset \underset{i}{+} A_i$ имеем $1 = \sum_i e_i$, $e_i \in A_i$ (может быть не единств. образом).

Запишем $x = \sum x_j = 1 \cdot (\sum x_j) = (\sum e_i) \cdot (\sum x_j) = \sum e_i x_i$

$1 \cdot x_j = e_j x_j = e_j \cdot x \Rightarrow$ разложение на x_i — определено однозначно.

Имеем из-зм: $A \xrightarrow{\sim} \prod A_i$

$x \to (x_1, \dots, x_n) = (e_1 x_1, \dots, e_n x_n)$.

Каждое из A_i имеет единственное неприводимое пр-ие.
(двуст. идеал)

<u>Лемма.</u> Если L - единств. неприв. пр-ие полупростой алгебры A, то оно точное.

<u>Д-во:</u> $A \simeq L \oplus \dots \oplus L$ тогда умножение на $a \in A$ $\underset{\underset{0}{\#}}{L_a} = (\rho(a), \dots, \rho(a))$ т.к. $L_a(1) = a \neq 0$.

<u>Сл-ие.</u> $A_i \simeq \mathrm{Mat}_{n_i}(D_i)$ □.

И $A \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Mat}_{n_i}(D_i)$ □.