Обыкновенные дифференциальные уравнения 2020, конспект. Пушкарь П.Е.

Первая лекция, 9 сентября

Наши главные герои это векторные поля и фазовые потоки. Для того, чтобы говорить о них понадобятся более простые вещи. Мы начнем с определения касательного вектора. Всегда, если не оговорено что-нибудь еще мы живем в "маленьком кусочке" пространства $\mathbb{R}^n$. Сейчас мы определим касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$.

Касательный вектор

Определим "путь с центром в точке a" как дифференцируемое отображение

$$\gamma\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t)),$$

и $\gamma(0) = a$. Тут γ_i это дифференцируемые функции на интервале $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Пути с центром в $a \in \mathbb{R}^n$ образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$, сейчас мы научимся их складывать и умножать на числа. Сумма двух путей γ_1 и γ_2 это путь γ_3, такой что

$$\gamma_3(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) - a.$$

Произведение числа λ на путь γ это путь, значение которого в точке $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ равно

$$\lambda\gamma(t) - \lambda a + a.$$

Проверьте, что пути с центром в a образуют векторное пространство V_a. Это пространство бесконечномерно даже при $n = 1$ (почему)? Сейчас мы его уменьшим.

Напомню, что говорят, что $f(t) = o(t)$ при $t \to 0$ для функции f на проколотом в нуле интервале $]-\delta, \delta[\subset \mathbb{R}$, если

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

Скажем, что два путиγ_1 и γ_2 с центром в точке a эквивалентны, если

$$\gamma_1(t) - \gamma_2(t) = o(t),$$

при $t \to 0$. Это можно понимать как $\sqrt{\sum(\gamma_{1,i}(t) - \gamma_{2,i}(t))^2} = o(t)$ при $t \to 0$ или как $\gamma_{1,i}(t) - \gamma_{2,i}(t) = o(t)$ при $t \to 0$ и всех $i \in \{1, ..., n\}$ или как $\max \gamma_{1,i}(t) - \gamma_{2,i}(t) = o(t)$ при $t \to 0$ или как-нибудь еще. Докажите, что эти способы эквивалентны. Класс эквивалентности пути γ мы обозначим через $[\gamma]$. Такой класс эквивалентности называется касательным вектором.

Касательное пространство

Введите на классах эквивалентности путей (с центром в a) структуру векторного пространства. Это пространство называется касательным пространством к $\mathbb{R}^n$ в точке a и обозначается $T_a\mathbb{R}^n$.

Для открытого подмножества U и $a \in U$ также определяется касательное пространство T_aU, естественно изоморфное пространству $T_a\mathbb{R}^n$.

Дальнейшие утверждения следует воспринимать как задачи.

Касательное пространство $T_a\mathbb{R}^n$ конечномерно, его размерность равна n. Более того, оно снабжено базисом, i-й вектор которого есть класс эквивалентности пути

$$\gamma_i(t) = (a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_n),$$

двигающемуся вдоль i-й координаты. Этот вектор (не очень корректно) обозначают $\frac{\partial}{\partial x_i}$, правильней было бы $\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$.

Укажем изоморфизм $T_a\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$: сопоставим касательному вектору $v \in T_a\mathbb{R}^n$ следующий вектор – возьмем представляющий v путь

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$$

и сопоставим v вектор $(\gamma_1'(0), ..., \gamma_n'(0))$. Это и есть разложение v по базису

Касательное отображение

Докажите, что при гладком отображении F открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ в открытое подмножество $V \subset \mathbb{R}^k$ эквивалентные пути с центром в a переходят в эквивалентные пути с центром в $F(a)$ и соответствующее отображение касательных пространств $T_a\mathbb{R}^n$ в $T_{F(a)}\mathbb{R}^k$ линейно. Это отображение называется производной или касательным отображением или дифференциалом отображения F в точке a и обозначается разными способами – $dF|_a$, $F'(a)$, $F_*(a)$..

Найти матрицу дифференциала отображения $F = (f_1, .., f_k)$ (f_i – функция) в базисах $\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}$ пространства $T_a\mathbb{R}^n$ и $\frac{\partial}{\partial y_1}, .., \frac{\partial}{\partial y_k}$ пространства $T_{F(a)}\mathbb{R}^k$. Эта матрица часто называется матрицей Якоби.

Дифференцирование функции вдоль касательного вектора

Если f гладкая функция (в окрестности точки a) и $v \in T_a\mathbb{R}^n$ касательный вектор, то можно продифференцировать f вдоль v. Для этого надо взять какой-нибудь путь γ, представляющий вектор v (т.е. $v = [\gamma]$), и вычислить число

$$\left.\frac{f(\gamma(t))}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Это число не зависит от выбора представляющего пути γ (докажите), обозначается $L_v f$.

Докажите, что для вектора $v = b_1\frac{\partial}{\partial x_1} + .. + b_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ производная $L_v f$ равна

$$b_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + .. + b_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Диффеоморфизмы

Мы переходим к понятию диффеоморфизма. Гладкое (тут возможны варианты, и чаще всего я буду говорить о бесконечной гладкости) отображение между открытыми множествами $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ $F\colon U \to V$ называется диффеоморфизмом, если есть обратное отображение F^{-1} и оно тоже гладкое. Докажите, что если диффеоморфизм между непустыми открытыми подмножествами векторных пространств существует, то размерности этих пространств равны: $m = n$.

Отображение F назовем локальным диффеоморфизмом в точке a, если найдется такая окрестность U точки a, что отображение ограничения $F|_U$ есть диффеоморфизм на образ,

$$F|_U\colon U \to F(U).$$

Вопрос – является ли отображение диффеоморфизмом может быть очень трудным. В отличие от этого вопрос, является ли отображение локальным диффеоморфизмом гораздо проще. Ответ на него дает знаменитая теорема об обратном отображении, сводящая дело к линейной алгебре.

Теорема об обратном отображении

Гладкое отображение $F\colon U \to V$ является локальным диффеоморфизмом в точке $a \in U$ если и только если его дифференциал

$$dF|_a\colon T_aU \to T_{F(a)}V$$

является изоморфизмом.

Это и есть теорема об обратной функции (обратном отображении), которую мы будем не раз использовать. Диффеоморфизм является локальным диффеоморфизмом в каждой точке области определения, а вот обратное вообще говоря неверно (приведите пример).

Векторные поля

Гладкое векторное поле v на $U \subset \mathbb{R}^n$ это касательный вектор $v(x)$ в каждой точке множества U, гладко зависящий от точки x. Остается определить, что значит "гладко зависящий от точки". Это можно определить координатным способом, сказав, что функции v_i из разложения

$$v = v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + v_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

являются гладкими. А можно менее координатно, сказав, что функция $L_v f$ гладкая, для гладкой функции f. Множество всех векторных полей на U часто обозначают через $Vect(U)$. Векторные поля можно складывать и умножать на функции – они образуют модуль над кольцом функций.

Касательное отображение переводит касательный вектор в касательный вектор, но из векторного поля вообще говоря не получается векторного поля (у точки может быть много прообразов). Но если отображение F диффеоморфизм, то векторы $F_*v(x)$ это векторы из векторного поля, которое естественно и обозначить через F_*v.

Опишем другой подход к касательному вектору и векторному полю. Назовем дифференцированием в точке $a \in U$ линейный функционал на пространстве гладких функций на U, удовлетворяющий тождеству Лейбница

$$D(fg) = f(a)D(g) + D(f)g(a).$$

Дифференцирования суть касательные векторы, для любого дифференцирования D найдется единственный касательный вектор $v(a) \in T_aU$, что $D = L_{v(a)}$.

Векторному полю v соответствует оператор L_v на пространстве гладких функций. Замечательно, что коммутатор таких операторов есть снова оператор такого вида (докажите), то есть найдется единственное векторное поле v_3, что

$$L_{v_3} = L_{v_1}L_{v_2} - L_{v_2}L_{v_1}$$

(все дифференцирования второго порядка сократятся). Это поле v_3 называется коммутатором (или скобкой Ли) векторных полей v_1 и v_2 и обозначается $[v_1, v_2]$.

Теорема о выпрямлении

Оказывается, что если гладкое векторное поле v не обращается в ноль, то локально оно "выпрямляется" диффеоморфизмом, то есть у точки x_0, такой что $v(x_0) \neq 0$ есть такая окрестность U и ее диффеоморфизм F, что

$$F_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Это основная теорема нашего курса, называется она – теорема о выпрямлении, мы докажем ее позже.

Вторая лекция, 16 сентября

Автономное обыкновенное дифференциальное уравнение

Пусть U открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, дальше я буду называть его фазовым пространством и обозначать буквой M. Пусть $v \in Vect(M)$. С этим векторным полем однозначно связано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x),$$

которое называется *автономным* (то есть независимым от времени) *обыкновенным дифференциальным* уравнением. Иногда его записывают как систему уравнений, например на плоскости с координатами (x_1, x_2) для векторного поля

$$v_1(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

получится система из двух уравнений

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = v_2(x_1, x_2).$$

Решения дифференциального уравнения

Решением нашего дифференциального уравнения называется отображение $\varphi\colon]a, b[\to U$, такое что

$$\varphi_*(t)(\frac{\partial}{\partial t}) = v(\varphi(t)).$$

Это равносильно тому, что $\frac{d}{dt}\varphi(t) = v(\varphi(t))$. Интервал может быть как конечный, так и бесконечный – возможны значения $a = -\infty$, $b = +\infty$. Это же условие, расписанное чуть подробнее на плоскости дает для $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ равенства

$$x_1'(t) = v_1(x_1(t), x_2(t))$$
$$x_2'(t) = v_2(x_1(t), x_2(t)).$$

Производную по времени принято изображать “точкой сверху”, это и объясняет появившуюся выше систему.

Таким образом, если у дифференциального уравнения есть одно решение, то у него сразу же есть континуум решений – ограничение решения на любой подинтервал оси времени тоже будет решением (как же можно говорить о единственности решения? – можно, но только эту единственность надо корректно определить).

Еще одно простое, но важное замечание – если φ это решение уравнения $\dot{x} = v(x)$, а f – диффеоморфизм, то $f \circ \varphi$ будет решением уравнения $\dot{y} = f_*(v)(y)$. Это обстоятельство подчеркивает важность теоремы о выпрямлении векторного поля.

Задача. Найти все решения уравнения $\dot{x} = v_0$, $v_0 \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор.

Сейчас мы сделаем много допущений и сконструируем определение. Это очень важный этап в математике, иногда самый важный. Итак, пусть есть векторное поле v в фазовом пространстве M. Для каждой точки $x_0 \in M$ мы предполагаем, что найдется решение φ_{x_0} уравнения $\dot{x} = v(x)$, определенное на всей прямой $\mathbb{R}$ и удовлетворяющее условию $\varphi(0)_{x_0} = x_0$ и более того, что такое (определенное на всей прямой и удовлетворяющее такому условию) решение всего одно! Еще не доказанная теорема о выпрямлении говорит, что эти допущения не так уж и страшны.

Рассмотрим “отображение за время T”

$$x_0 \mapsto \varphi_{x_0}(T),$$

переводящее точку в значение решения с этой начальной точкой в момент T, подразумевая именно это отображение (которое принято обозначать g^T), мы формулируем следующие определения.

Однопараметрическая группа преобразований, фазовый поток

Определение. *Однопараметрическая группа преобразований* множества M это семейство $\{g^t\}$ отображений множества M в себя, занумерованных вещественными числами ($t \in \mathbb{R}$), удовлетворяющее условию:

$$g^{t+s} = g^t g^s$$

для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и g^0 – тождественное отображение.

Задача. Все отображения однопараметрической группы взаимно однозначны.

Определение. *Однопараметрическая группа диффеоморфизмов* это такое отображение $g\colon \mathbb{R} \times M \to M$, что

$$g(t, x) = g^t x$$

1) отображение g дифференцируемо; 2) для любого $t \in \mathbb{R}$ отображение $g^t\colon M \to M$ это диффеоморфизм; 3) семейство $g^t_{t\in\mathbb{R}}$ является однопараметрической группой преобразований.

Пример. $M = \mathbb{R}$, $g^t x = x + vt$.

И, наконец, *фазовый поток* $(M, \{g^t\})$ это фазовое пространство M, точки которого иногда называются *фазовыми точками* и однопараметрическая группа диффеоморфизмов $\{g^t\}$ фазового пространства M.

Фазовая кривая и фазовая скорость

Движением точки $x \in M$ под действием потока называется отображение

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to M, \varphi(t) = g^t x.$$

Фазовой кривой называется образ этого отображения. *Положением равновесия* или *неподвижной точкой* называют точку x, такую что

$$g^t x = x \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Фазовая скорость потока g^t в точке $x \in M$ это вектор скорости движения фазовой точки

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x = v(x).$$

Этот вектор часто обозначается через $\dot{x}$. Почему этот вектор определен?

Задача. Покажите, что

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} g^t x = v(g^\tau x).$$

переделать про расширенное пространство!!!!!!!!!!!!!

Расширенное фазовое пространство. Интегральные кривые – графики решений. Докажите, что их наклон постоянен вдоль горизонтали.

Теорема сравнения

Теорема сравнения. Для двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v_1(x),\ \dot{x} = v_2(x)$$

с непрерывными правыми частями, удовлетворяющими условию $v_1 < v_2$, и одинаковыми начальными условиями решений $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$, определенных на одном интервале, неравенство

$$\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$$

справедливо для всех $t \geq t_0$ из этого интервала.

Доказательство. Пусть $\varphi_1(t)$ решение первого уравнения, а $\varphi_2(t)$ решение второго уравнения. Тогда разность производных

$$\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)$$

положительна при $t > t_0$, поскольку она равна разности значений v_2 и v_1. Интегрируя получаем

$$\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} [\varphi_2'(\tau) - \varphi_1'(\tau)] d\tau,$$

поскольку $\varphi_2(t_0) - \varphi_1(t_0) = 0$. Поэтому при $t > t_0$ $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$, что нам и нужно.

Задача. Покажите, что это доказательство неверно.

Правильное доказательство. Рассмотрим решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Тогда если $t > t_0$ близко к t_0, то $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$, так как $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ и $\varphi_1'(t_0) < \varphi_2'(t_0)$. Если же при каком-то $T > t_0$ значение первого решения больше значения второго решения $\varphi_1(T) > \varphi_2(T)$ то на интервале (!) $]t_0, T[$ найдется такое t_1, что

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)$$

и из всех этих t_1 можно взять наименьшее (объясните, почему это можно сделать), оно равно

$$\inf\{t_1 \in]t_0, T[\ |\ \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)\}.$$

Для такого t_1 при $t_3 < t_1$ и достаточно близком к t_1 верно неравенство

$$\varphi_1(t_3) > \varphi_2(t_3).$$

Таким образом, на интервале $]t_0, t_3[$ по теореме о промежуточном значении найдется еще одно число a, автоматически меньшее t_1, такое что

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a).$$

Это противоречит минимальности t_1. Это противоречие и завершает доказательство.

Неавтономные уравнения и векторные поля

Векторные поля и соответствующие дифференциальные уравнения могут (что часто встречается на практике) зависеть от времени. Такое уравнение имеет вид

$$\dot{x} = v(t, x),$$

его решение – функция φ (определенная также как и в автономном случае на интервале), такая что

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = v(t, \varphi(t)).$$

Почему я об этом говорю – первое уравнение, которое мы решим, после примера $\dot{x} = c$, является неавтономным:

$$\dot{x} = f(t),$$

а функция f предполагается гладкой (хотя бы непрерывной). Собственно, интегральное исчисление было создано для решения этого уравнения. Решение с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ дается формулой

$$\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$$

докажите это и то, что решения с одинаковым начальным условием совпадают на пересечении интервалов областей определения решений.

Теорема. Пусть функция v дифференцируема. Тогда решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ существует, любые два решения с одинаковым начальным условием совпадают в некоторой окрестности точки t_0. Кроме этого, решение φ уравнения с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ удовлетворяет соотношению

$$t - t_0 = \int\limits_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{v(\xi)},$$

если $v(x_0) \neq 0$, и

$$\varphi(t) = x_0,$$

если $v(t_0) = 0$.

Пример. Пусть $v = x^{2/3}, t_0 = 0, x_0 = 0$ нулевое решение и $(t/3)^3$ тоже решение.

Попробуйте доказать эту теорему.

Третья лекция, 23 сентября

Мы будем рассматривать неавтономные уравнения $\dot{x} = v(x,t)$. Нет никакой надежды решить уравнение такого вида, однако решение можно найти с хорошей точностью. Один способ такой – строить так называемые ломаные Эйлера. Чтобы найти решение с начальным условием $\varphi(0) = x_0$ в момент времени t_0 разобьем отрезок $[0,t_0]$ на N равных частей точками

$$\tau_i = i\frac{t_0}{N}.$$

На каждом отрезке $[\tau_{i-1},\tau_i]$ $(\tau_0 = 0)$ из $[0,\tau_1],[\tau_1,\tau_2],...,[\tau_{N-1},\tau_N]$ точка движется с постоянной скоростью $v(x_N^{i-1},\tau_{i-1})$ и ее значение x_N^i в момент τ_i вычисляется из значения в τ_{i-1}, а значение в 0 равно x_0. Таким образом, последовательно получаем все точки $x_N^1, x_N^2, ..., x_N^N$ и кусочно-афинное отображение

$$\varphi_N\colon [0,t_0] \to \mathbb{R}^n,$$

приближающее решение φ. Мы не будем доказывать, что

Задача. 1. Для векторного поля $v(x) = kx$ на прямой вычислить $\varphi_N(t_0)$ и доказать, что

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(t_0) = e^{kt_0}x_0.$$

2. Для векторного поля $v(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ и $x_0 = (a,0)$ вычислить $\varphi_N(t_0)$ и найти предел $\lim\limits_{N\to\infty} \varphi_N(t_0)$. Французские школьники, как показывали мне их родители около 2010 года, знакомясь (в младших классах) с движением планет вокруг Солнца решали именно соответствующее дифференциальное уравнение на плоскости методом ломаных Эйлера с каким-то фиксированным N (может быть 10) (решал, конечно, компьютер, и рисовал им ломаную Эйлера). У них выходило, что планеты улетают от Солнца по "спирали" .

Метрические пространства и теорема о сжатых отображениях.

Напомню, что метрическое пространство это пара (M,ρ), состоящая из множества M и функции ρ на $M\times M$ со значением в неотрицательных числах. Эта функция, называемая *метрикой* должна удовлетворять следующим аксиомам (условий) 1) $\rho(x,y) = 0$ если и только если $x = y$; 2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ при любых x,y; 3) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Метрических пространств очень много, некоторые из них нам встретятся в доказательстве теоремы существования.

Наш основной инструмент есть теорема о сжатых отображениях, напомним ее. Отображение $f\colon M \to M$ метрического пространства в себя называется *сжатым*, если $\rho(f(x),f(y)) \le \lambda\rho(x,y)$ для некоторого $0 \le \lambda < 1$ и всех $x,y \in M$. Точка x называется *неподвижной* для отображения f, если $f(x) = x$.

Теорема о сжатом отображении. Пусть f сжатое отображение полного пространства. Тогда у него есть единственная неподвижная точка.

Доказательство. Для любой точки $x \in M$ последовательность

$$x, f(x), f(f(x)), f^3(x), ...$$

сходится к этой неподвижной точке. Действительно,

$$\rho(f^n(x), f^{n+1}(x)) \le \lambda^n\rho(x,f(x)).$$

Поэтому, $(f^n(x))$ является фундаментальной последовательностью (почему?). Докажем, что ее предел y является неподвижной точкой. Действительно, сжатые отображения непрерывны — дельту (в определении непрерывности) можно брать равной эпсилону. Имеем

$$f(y) = f(\lim f^n(x)) = \lim f^{n+1}(x) = y.$$

Пусть z неподвижная точка, тогда

$$\rho(f(y), f(z) \leq \lambda\rho(y, z),$$

так как f сжатое имеем $\rho(y, z) = 0$.

Задача. Пусть z неподвижная точка сжатого отображения с параметром λ и $\rho(x, f(x)) = d$. Докажите, что

$$\rho(x, z) \leq \frac{d}{1-\lambda}.$$

Последовательные приближения Пикара.

Определим магическое отображение P:

$$P(\varphi)(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(\varphi(\tau), \tau)d\tau.$$

Пока еще это даже не отображение – не очень понятно где оно определено. Рассмотрим графики, живущие в расширенном фазовом пространстве. Касательная к графику $P(\varphi)$ в точке с абсциссой t параллельна $(v(\varphi(t), t), 1)$ – докажите. Для решения с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ имеем $P(\varphi) = \varphi$.

Пример 1. Для неавтономного векторного поля $v = g(t)$, $\dot{x} = g(t)$ начнем с $\varphi(t) = x_0$ (постоянная). Тогда $P(\varphi) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau$ – первое же приближение Пикара есть решение.

Пример 2. Для векторного поля на прямой $\dot{x} = x$ $t_0 = 0$ начнем опять с $\varphi(t) = x_0$:

$$P(\varphi)(t) = x_0 + \int\limits_0^t x_0 d\tau = x_0(1+t)$$

$$P^2(\varphi)(t) = x_0 + \int\limits_0^t x_0(1+\tau)d\tau = x_0(1 + t + \frac{t^2}{2})$$

$$\ldots$$

$$P^n(\varphi)(t) = x_0(1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!}).$$

Мы видим последовательные частичные суммы разложения Тейлора для экспоненты. Отметим, что мы еще не разобрались где действует отображение Пикара. В дальнейшем доказательстве мы построим полное метрическое пространство, в котором отображение Пикара сжато.

Нам понадобятся следующие объекты:

1. **Норма** $|x| = \sqrt{(x, x)}$ – длина вектора.

2. **Условие Липшица:** для отображения $F\colon (M_1,\rho_1)\to(M_2,\rho_2)$ метрических пространств, говорят, что это отображение удовлетворяет условию Липшица с константой $L>0$, если F изменяет расстояние между любыми двумя точками не больше, чем в L раз

$$\rho_2(F(x),F(y))\le L\rho_1(x,y).$$

Задачи. 1) $y=\sqrt{x}$ (отображение $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ со стандартной метрикой в образе и прообразе $\rho(x,y)=|x-y|$); 2) $y=x^2$ (те же области определений и значений и метрика); 3) $y=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ (отображение $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ на плоскости и луче евклидовы метрики); 4) условие Липшица напоминает сжатость, следует из нее, липшицевы отображения автоматически непрерывны; 5) верно ли, что непрерывное отображение компакта липшицево?

Пусть есть оператор из пространства L_1 с нормой $||.||_1$ в пространство L_2 с нормой $||.||_2$. Его нормой $||A||$ называют число (если оно существует)

$$\sup_{x\in L_1\setminus\{0\}}\frac{||Ax||_2}{||x||_1}.$$

Если пространства L_1 и L_2 конечномерны, то норма существует и достигается (докажите).

Лемма. Пусть f непрерывно дифференцирумое отображение выпуклого компакта (лежащего в открытой области определения f) $V\subset\mathbb{R}^m$. Тогда f на V липшецово с константой L, равной точной верхней грани (на V) нормы производной отображения f,

$$L=\sup|f_*|.$$

Доказательство. Соединим точки x и y отрезком $z(t)=x+t(y-x)$ $t\in[0,1]$. Имеем:

$$f(y)-f(x)=\int\limits_0^1\frac{d}{dt}f(z(t))dt=\int\limits_0^1 f_{*z(t)}\dot z(t)dt.$$

На это равенство можно поставить модуль и превратить его в неравенство

$$\left|\int\limits_0^1 f_{*z(t)}\dot z(t)dt\right|\le\int\limits_0^1 L|x-y|dt=L|y-x|.$$

Подумайте, почему это превращение законно.

Теперь вернемся к нашему дифференциальному уравнению

$$\dot x=v(x,t).$$

Относительно v мы предполагаем, что v определена и дифференцируема (класса C^r с $r\ge1$) в некоторой области U, лежащей в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$. Зафиксируем точку $(x_0,t_0)\in U$. Зафиксируем теперь достаточно малые положительные числа a,b такие, что цилиндр $I_{a,b}$

$$(x,t):|t-t_0|\le a,|x-x_0|\le b$$

лежит в U. Пусть $C=\sup|v|$ и $L=\sup|v_*|$ (точные грани берутся по зафиксированному цилиндру, а производная "берется по x").

Теперь рассмотрим конус

$$K_0 = \{(x,t) : |t - t_0| \leq a', |x - x_0| \leq C|t - t_0|\}.$$

Если числа a' и b' достаточно малы то конус K_0 и даже все параллельно перенесенные конуса (их мы обозначаем через K_x) с вершинами в точке (x, t_0) где $|x - x_0| \leq b'$ лежат внутри первоначального цилиндра $I_{a,b}$.

Решение нашего уравнения с начальным условием $\varphi(t_0) = x$ мы ищем в виде

$$\varphi(t) = x + h(x,t)$$

Тогда соответствующая интегральная кривая будет лежать внутри конуса K_x.

Построим метрическое пространство M: оно состоит из всех непрерывных отображений h цилиндра

$$|x - x_0| \leq b', |t - t_0| \leq a'$$

таких что

$$|h(x,t)| \leq C|t - t_0|.$$

А метрика на этом пространстве

$$\rho(h_1, h_2) = ||h_1 - h_2||$$

есть обычная C^0-метрика.

Утверждение. (M, ρ) является полным пространством. Равномерный предел непрерывных отображений непрерывен, предел тожеудовлетворяет неравенству с константой C.

Доказательство. Рассмотрим отображение $P\colon M \to M$:

$$Ph(x,t) = \int\limits_{t_0}^{t} v(x + h(x,\tau), \tau) d\tau.$$

Точка $(x + h(x,\tau), \tau)$ лежит в K_x, в ней определено v. Покажем, что при достаточно малом a' отображение P переводит M в себя и сжато.

Во-первых, Ph непрывно (интеграл непрерывно зависящей от параметра непрерывной функции непрерывно зависит от параметра и верхнего предела интегрирования). Во-вторых,

$$|Ph(x,t)| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} v(...)d\tau| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} Cdt| \leq C|t - t_0|,$$

потому $P(M) \subset M$.

Покажем, что при достаточно малых a' отображение P сжато.

$$(Ph_1 - Ph_2)(x,t) = \int\limits_{t_0}^{t} (v_1 - v_2) d\tau$$

$v_i(\tau) = v(x + h(x,\tau), \tau)$.

$$|v_1(\tau) - v_2(\tau)| \leq L|h_1(x,\tau) - h_2(x,\tau)| \leq L||h_1 - h_2||.$$

Имеем:

$$|Ph_1 - Ph_2(x,t)| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} L|h_1 - h_2||d\tau| \leq La'||h_1 - h_2||$$

и при $La' < 1$ отображение сжато.

Теорема. Если v непрерывно дифференцируемо в окрестности точки (x_0, t_0) расширенного фазового пространства, то у точки t_0 есть окрестность, что в этой окрестности определено решение с начальным условием $\varphi(t_0) = x$, где x любая достаточно близкая к x_0 точка, причем это решение непрерывно зависит от начального x.

Рассмотрим неподвижную точку h отображения P. Пусть $g(x,t) = x + h(x,t)$.

$$g(x,t) = x + \int\limits_{t_0}^{t} v(g(x,\tau),\tau)d\tau$$

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = v(g(x,t),t)$$

Теорема существования доказана.

Теорема единственности вытекает из того, что при $b' = 0$ из единственности неподвижной точки сжатого отображения следует единственность решения

Лекция четвертая, 30 сентября

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(t, x),$$

заданное в некоторой области расширенного фазового пространства. Возьмем точку(t_0, x_0) этой области.

Теорема 1. Существует диффеоморфизм f окрестности V этой точки на окрестность W, лежащей в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, с координатами $(t, y_1, ..., y_n)$ такой, что исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$\dot{y} = 0.$$

В этом условии немного замазано, что этот диффеоморфизм сохраняет координату t. Эквивалентность означает, что $\varphi\colon I \to V$ решение исходного уравнения тогда и только тогда, когда $f \circ \varphi\colon I \to W$ решение второго уравнения.

Доказательство. Рассмотрим отображение (в обратную сторону), определенное формулой

$$G(x, t) = (g(x, t), t)$$

где $g(x, t)$ есть решение исходного уравнения с начальным условием $g(x, t_0) = x$.

Покажем, что G в окрестности точки (x_0, t_0) есть выпрямляющий диффеоморфизм.

1) Отображение G дифференцируемо. Это (пока) не доказано.

2) Отображение G оставляет координату t на месте, по построению.

3) Отображение G_* переводит стандартное векторное поле

$$e(\dot{x} = 0, \dot{t} = 1)$$

в поле

$$(v, 1).$$

4) Отображение G в окрестности точки (x_0, t_0) является диффеоморфизмом. Потому что сужение G_* на $\mathbb{R}^n$ тождественно, а $G_*(e) = v + e$. Следовательно, G локальный диффеоморфизм. $\square$

Теорема о выпрямлении векторного поля.

Напомнить как диффеоморфизмы действуют на векторные поля.

Рассмотрим теперь автономное уравнение

$$\dot{x} = v(x),$$

заданное в области $\mathbb{R}^n$; поле v предполагается гладким. Пусть x_0 точка области определения.

Теорема 2. В некоторой окрестности точки x_0 поле v диффеоморфно постоянному полю $\frac{\partial}{\partial x_1}$. То есть найдется диффеоморфизм f этой окрестности той же гладкости C^r $r \geq 1$ что и векторное поле, что

$$f_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

В такой формулировке теорема неверна — почему? нужно добавить условие неособости $v(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Вектор $v_0 = v(x_0)$ отличен от нуля. Есть гиперплоскость Γ^{n-1}, проходящая через x_0, и трансверсальная прямой, натянутой на v_0. Строим отображение G:

$$G(\xi, t) = g(\xi, t),$$

где $\xi \in \Gamma^{n-1}$, а $g(\xi, t)$ есть значение решения φ с начальным условием

$$\varphi(0) = \xi.$$

Обратное отображение G^{-1} является выпрямляющим диффеоморфизмом. $\square$

Линеаризация. Уравнение в вариациях

Тут же можно объяснить, что весь интерес в нулевом приближении в особых точках и потому поговорить про линеаризацию (определить ее). И сказать, что линейные уравнения мы изучим в дальнейшем.

Уравнение в вариациях

Задача. Пусть векторное поле на плоскости всюду гладкое и всюду ненулевое. Можно ли его выпрямить диффеоморфизмом плоскости?

Задача, неизвестным ответом. Есть ли у полей направлений без особенностей "модули"? Более формально можно спросить так, рассмотрим поле направлений без особых точек ξ на $\mathbb{R}^n$. Поле ξ индуцирует поле ξ_c на полупространстве $x_1 > c$. Все эти пространства, очевидно, диффеоморфны. Может ли так быть, что поля направлений ξ_c не переводятся друг в друга (при разных значениях c) диффеоморфимом?

Продолжаемость решений.

Обсудить продолжаемость решений векторного поля на прямой $v(x) = x^2 + 1$.

Теорема о продолжении. Пусть v гладкое векторное поле в области U, x_0 точка из U. Говорят, что решение с начальным условием x_0 продолжается вперед до подмножества Γ области U, если существует решение φ, определенное на отрезке $[t_0, T]$, $\varphi(t_0) = x_0$ и $\varphi(T) \in \Gamma$.

Собственно теорема: Решение φ можно продолжать вперед (назад) неограниченно или до границы компакта. Два решения с совпадающим начальным условием совпадают на пересечении областей определения.

Первые интегралы.

Первые интегралы векторного поля v это функции f, такие что

$$L_v f = 0.$$

. Их много локально в окрестности неособой точки. А именно, первый интеграл векторного поля $\frac{\partial}{\partial x_1}$ на $\mathbb{R}^n$ это любая гладкая функция, от оставшихся координтат $x_2, ..., x_n$.

Задача. Почему у эйлерова поля $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ нет глобальных первых интегралов кроме констант? Найти первый интеграл гладкий вне нуля для эйлерова поля.

Мы определим ужасным и неинвариантным способом гамильтоновы поля на координатном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n$ как

$$-\sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Задача. Функция Гамильтона является первым интегралом.

Консервативная система с одной степенью свободы.

Консервативная система с одной степенью свободы, это такое дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = F(x).$$

Здесь функция F определена на I, который называют конфигурационным пространством, координату x называют координатой $\dot{x}$ – скоростью, $\ddot{x}$ – ускорением, $F(x)$ – силой. Это уравнение эквивалентно системе

$$\dot{x_1} = x_2, \;\; \dot{x_2} = F(x_1),$$

что объясняет, что такое уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением (на плоскости).

Кроме этого, функцию

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{x_2^2}{2}$$

называют кинетической энергией, а

$$U = -\int\limits_{x_0}^{x} F(\tau)d\tau$$

– потенциальной энергией, а функцию $E = T + U$ полной энергией.

Теорема. Полная энергия является первым интегралом.

Множество уровня энергии явлется гладкой кривой в окрестности точек, не являющихся положением равновесия

Лекция пятая, 7 октября

Уравнение в вариациях.

Пусть есть векторное поле v в $\mathbb{R}^n$ или его открытом подмножестве. Пусть есть решение (фазовая кривая) $\varphi(t), t \in [0,T]$ для этого векторного поля. Тут надо себе представлять, что мы запускаем ракету на Марс и долго трудились, вычисляя это решение, а компьютеры были в миллионы раз слабее сегодняшних. Конечно, точно направить ракету мы не можем, поэтому она как-то отклонится. Здравый вопрос – как именно? И в первом порядке за отклонение решения отвечает дифференциал отображения фазового потока поля v за время $[0,T]$

$$dg^T(x_0),$$

где $\varphi(t) = g^t_v(x_0)$, тут x_0 какое-то, тоже с непомерным трудом вычисленное начальное условие. Сейчас мы получим (другое) дифференциальное уравнение, при помощи следующего простого и важного рассуждения. Рассмотрим решение $\varphi(t,\varepsilon)$ (по времени t оно решение, но зависит от параметра ε), имеем:

$$\dot{\varphi(t,\varepsilon)} = v(\varphi(t,\varepsilon)),$$

где точка это производная по t. Разложим это равенство в ряд по параметру ε до первого члена:

$$\varphi(t,\varepsilon) = \varphi(t,0) + \varepsilon z(t) + ...$$

$$v(\varphi(t,\varepsilon)) = v(\varphi(t,0) + \varepsilon x(t) + ...) = v(\varphi(t,0)) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(t,0))z(t) + ...,$$

где $\frac{\partial v}{\partial x}$ это матрица, подумайте какая. Мы не обосновываем строго ничего – мы не знаем почему можно разложить в ряд (мы не доказывали, что верна теорема о дифференцируемости), тем не менее в предположении что она верна мы видим что $z(t)$ – производная решения по ε – удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(t,0))z,$$

это неавтономное (так скорее всего будет даже если исходное поле было автономным!) линейное дифференциальное уравнение называется уравнением в вариациях.

Замечание. Мы неявно использовали структуру линейного (или даже афинного) пространства в этом рассуждении.

Задача. Отображение, переводящее z_0 в значение решения уравнения в вариациях с начальным условием $z(0) = z_0$ в значение $z(T)$ в момент $t = T$, это и есть нужное нам отображение

$$dg^T(x_0).$$

Задача. Выписать уравнение в вариациях для векторного поля $0, 1, 2x-1, x^2$ вдоль решения с начальным условием $\varphi(0) = 1$.

Линейные системы и экспонента.

1. Линеаризация. Почему эта операция не зависит от системы координат? И что это значит.

2. Однопараметрическая группа линейных преобразований

Задача. Докажите, что если g^t однопараметрическая группа линейных преобразований, то движение $\varphi(t)$ точки x_0 есть решение уравнения

$$\dot{x} = Ax$$

с начальным условием $\varphi(0) = x_0$, а оператор A определен равенством

$$Ax = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x.$$

Мы увидим, что верно обратное: по оператору A можно построить однопараметрическую группу g^t.

Задача. найти поле скоростей вращения вокруг оси с угловой скоростью ω.

3. Что такое линейное уравнение - уравнение на $\mathbb{R}^n$, заданное векторным полем Ax, где A линейный оператор на $\mathbb{R}^n$

Случай одной координаты мы знаем – решение дается экспонентой

$$e^{At} x_0.$$

Общий случай решается также. Нужно только определить что это такое – экспонента от матрицы, чем мы и займемся.

4. Как и в случае прямой, экспоненту можно определить как сумму ряда или предел

$$E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(E + \frac{A}{n}\right)^n$$

Для сходимости требуется норма оператора. Пространство исходно евклидово.

Задача. $||A||^2 \le \sum\limits_{i,j} a_{ij}^2$

Теорема. Линейные операторы образуют n^2-мерное пространство, полное метрическое.

В нем (полном нормированном пространстве) можно складывать ряды и даже почленно их дифференцировать: Если ряд из функций $f_i \colon \mathbb{R} \to M$ сходится и ряд из производных сходится равномерно, то ряд из производных сходится к производной суммы ряда.

5. Экспонентой оператора A называют сумму ряда

$$E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...$$

Теорема. Этот ряд сходится равномерно на любом множестве

$$\{A |\ ||A|| \le c\}.$$

Задача. Вычислить e^{tA}, для оператора A, определенного матрицей
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема. Пусть $e^{t\frac{d}{dt}} = S_t$, тогда S_t есть оператор сдвига на t в пространстве многочленов степени не выше n: переводит многочлен $f(x)$ в многочлен $f(x+t)$.

Доказательство – формула Тейлора для многочленов (конечна!)

$$f(x+t) = f(x) + \frac{t}{1!}\frac{df}{dx} + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2} + \dots$$

и совпадает с формулой для экспоненты. $\square$

6. Для диагонального оператора и диагонализируемого легко вычислять экспоненту.

Например – экспонента оператора $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ это половина оператора $\begin{pmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{pmatrix}$, докажите.

7 Удобно считать экспоненту нильпотентного оператора. Посчитайте экспоненту от нильпотентной жордановой клетки умноженной на t.

8. Квазимногочлены с показателем λ: функции вида $e^{\lambda x} f(x)$, где f это многочлен, степень многочлена это степень квазимногочлена по определению.

Вычислить матрицу e^{At} для жордановой клетки с собственным числом λ.

9. Семейство операторов e^{tA} является однопараметрической группой - перемножить ряды

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$$

Вопрос $e^{A+B} = e^A e^B$? Верно ли что образ экспоненты – все операторы?

10. Формула для решения уравнения.

Лекция шестая, 14 октября

Экспонента еще раз.

Задача. Найдите производную экспоненциального отображения $A \to e^A$ в нуле (=нулевом операторе).

Теорема. Решение линейной системы $\dot{x} = Ax$ с начальным условием x_0 дается формулой

$$e^{tA}x_0$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Утверждение. Если L инвариантное подпространство для A, то и для e^{tA} оно инвариантно.

В самом деле, ограничим векторное поле на L получим векторное поле на L, решения которого которое автоматически лежит в L. По теореме единственности эти же решения являются решениями "большого" уравнения. $\square$

2. Второе определение экспоненты как и в случае одной переменной дается пределом

$$e^A = \lim_{n\to\infty}\left(E + \frac{A}{n}\right)^n.$$

Почему это определение приводит к тому же результату:

$$e^A - \left(E + \frac{A}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k})A^k$$

коэффициенты этой разности неотрицательны, поскольку

$$\frac{1}{k!} \geq \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{m \cdot m \cdot ... \cdot m}\frac{1}{k!}.$$

Поэтому для $a = ||A||$

$$||e^A - \left(E + \frac{A}{m}\right)^m|| \leq \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k})a^k = e^a - \left(E + \frac{a}{m}\right)^m,$$

а это стремится к нулю при $m \to \infty$.

3. Формула Эйлера для экспоненты.

Задача. Найти матрицу A умножения на число $z = a + bi$, считая $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Ответ: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Найдем оператор e^A: оператор $E + \frac{A}{n}$ есть умножение на комплексное число $1 + \frac{z}{n}$. То есть поворот на аргумент числа $1 + \frac{z}{n}$ и умножение на его модуль.

Задача. При $n \to \infty$ верны следующие ассимптотические равенства

$$\arg(1 + \frac{z}{n}) = \mathrm{Im}\frac{z}{n} + o(\frac{1}{n})$$
$$|1 + \frac{z}{n}| = 1 + \mathrm{Re}\frac{z}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty} n\arg(1 + \frac{z}{n}) = \mathrm{Im}z,$$

$$\lim_{n\to\infty}|1+\frac{z}{n}|^n = e^{\mathrm{Re}z}.$$

Таким образом, экспонента оператора умножения на $a+bi$ есть оператор умножения на комплексное число $e^a(\cos b + i\sin b)$.

4. Определитель экспоненты.

$$\det e^A = e^{\mathrm{Tr}A}.$$

Можно вывести из теоремы о жордановой нормальной форме. А можно из второго определения экспоненты:

$$\det e^A = \det(\lim_{n\to\infty}\left(E+\frac{A}{n}\right)^n) = \lim_{n\to\infty}(\det\left(E+\frac{A}{n}\right)^n))$$

определитель – непрерывная функция матрицы

$$\lim_{n\to\infty}(\det\left(E+\frac{A}{n}\right)^n)) = (\det\left(E+\frac{A}{n}\right))^n = (1+\frac{1}{n}\mathrm{Tr}A + O(\frac{1}{n^2}))^n$$

Откуда следует утверждение.

Пример. Маятник с трением $-k$ – уравнение

$$\ddot{x} = -x + k\dot{x}$$

задает обыкновенное уравнение $\dot{u} = Au$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$, след которой равен k. Если $k<0$ то преобразования g^t при положительных t переводят области в области с меньшей площадью. И так далее, отдельно случай $k=0$.

5. Вычисление матрицы экспоненты в случае различных вещественных чисел

$$\dot{x} = Ax$$

если все собственные числа вещественны и некратны. Тогда матрица e^{tA} сопряжена диагональной с собственными числами $e^{t\lambda_k}$ (λ_k – собственные числа A).

Рецепт решения соответствующего уравнения с данными начальными условиями: Составить характеристическое уравнение, найти его корни $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и соответствующие ненулевые собственные векторы $e_1, ..., e_n$. Разложить вектор начальных условий x_0 по собственным векторам

$$x_0 = C_1e_1 + ... + C_ne_n.$$

Искомое решение есть

$$C_1e^{t\lambda_1}e_1 + ... + C_ne^{t\lambda_n}e_n.$$

Отметим, что элементы матрицы e^{At} в любом базисе линейная комбинация экспонент $e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n}$.

6. **Вопрос.** Как найти формулу для последовательности Фибоначчи. (Более простая дискретная задача, на первый взгляд.)

Вектор $\xi_n = (x_n, x_{n-1})$ есть $A\xi_{n-1}$, где A это оператор с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Собственные числа $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, откуда получается известная формула Бине.

7. Разговор о комплексификации и овеществлении. Овеществление – забыть структуру $\mathbb{C}$-модуля, оставив структуру $\mathbb{R}$-модуля. Овеществление пространства $\mathbb{C}^n$ есть ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Овеществление оператора это $\mathbb{R}$-линейный оператор, совпадающий поточечно с исходным комплексным.

Комплексификация пространства – пространство пар, где умножение на комплексное число и сложение определено стандартно.

$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вещественный оператор.

Рассмотрим комплексное уравнение ($z \in \mathbb{C}^n$)

$$\dot{z} = Az.$$

Его решением называется такое отображение интервала в $\mathbb{C}^n$, что его овеществление является решением овеществленного уравнения. Оказывается, комплексные уравнения решаются также как вещественные – экспонентой, решение задается той же функцией $e^{tA}z_0$. Это теоремы!

Разобрать комплекно линейное уравнение в $\mathbb{C}$, его овеществление, графики его решений (т.е. интегральные кривые)– подчеркнуть случай чисто мнимого числа. Фазовая кривая (если собственное число комплексно и не чисто мнимо) называется логарифмической спиралью.

$$\varphi = \frac{\ln r}{k}$$

А особая точка называется фокусом – устойчивым если $\mathrm{Re}\lambda > 0$ и неустойчивым при $\mathrm{Re}\lambda < 0$

8. Вычисление матрицы экспоненты в случае различных собственных чисел. Рассмотрим случай, когда вещественная матрица имеет комплексные собственные числа.

Собственные числа вещественного многочлена делятся на пары комплексно сопряженных и одиночные вещественные. Пусть собственные числа некратные. Тогда каждому вещественному можно сопоставить свой вещественный собственный вектор, и натянутого на него прямую, а паре сопряженных (с собственными числами $\lambda, \bar{\lambda}$) – двумерное вещественное инвариантное пространство.

Действительно (двумерная история) — собственному числу λ отвечает комплексная прямая $\mathbb{C}_\lambda$, а сопряженному числу $\bar{\lambda}$ комплексная прямая $\mathbb{C}_{\bar{\lambda}}$, составленная из сопряженных точек к точкам $\mathbb{C}_\lambda$. Эти прямые не совпадают и их сумма есть двумерное комплексное пространство. Пусть ξ собственный вектор с собственным числом λ тогда $\bar{\xi}$ собственный вектор с собственным числом $\bar{\lambda}$. Вектор ξ есть сумма $x + iy$, x – вещественная часть, а y – мнимая. Векторы x, y вещественны и лежат в $C_\lambda \oplus \mathbb{C}_{\bar{\lambda}}$. Поскольку они выражаются (т.е. являются комплексными линейными комбинациями) через $\xi, \bar{\xi}$: $\bar{\xi} = x - iy$. Вот очевидные явные формулы

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}), y = \frac{1}{2i}(\xi - \bar{\xi}).$$

Векторы x, y комплексно линейно независимы – они образуют базис $C_\lambda \oplus \mathbb{C}_{\bar{\lambda}}$. Пусть $\lambda = a+bi$. Тогда Ax это $1/2(\lambda\xi + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = a(1/2(\xi + \bar{\xi})) + (1/2bi)\xi - (1/2bi)\bar{\xi} = ax - by$, аналогично $Ay = bx + ay$. В случае некратных собственных чисел вещественное фазовое пространство распадается в прямую сумму одномерных и двумерных пространств.

Докажите (фактически мы уже это сделали), что в двумерном случае ограничение оператора на двумерную плоскость является овеществлением умножения на комплексное число λ.

9. Линейные системы на плоскости Собственные числа вещественны — разных знаков – седло Одного знака – узел – устойчивый и неустойчивый. Кратные – (ненулевая) клетка – тоже узел корни комплексны – фокус, а если вещественная часть равна нулю – центр

10. Напомнить (в смысле – задача) как вычисляется и выглядит экспонента от жордановой клетки умноженной на t: верхнетреугольная матрица с коэффициентами $(t^k/k!)e^{\lambda t}$

Следствие. Если λ_i корни характеристического многочлена (вообще говоря комплексного) оператора A с кратностями ν_i то элементы матрицы e^{At} есть сумма квазимногочленов с показателями λ_i и степенями ν_i.

Для вещественного оператора вещественная и мнимая часть решения является решением (задача)

Пусть λ_k вещественные собственные числа вещественного оператора A с кратностями ν_k, $\lambda_l \pm i\omega_l$ комплексные собственные числа с кратностями μ_l. Тогда каждый элемент матрицы e^{At} и каждая компонента решения является суммой комплексных квазимногочленов с показателями λ_k, $\lambda_l \pm i\omega_l$ и степеней меньше ν_k, μ_l соответственно.

Вещественные формулы для матричных элементов и компонент решения таковы:

$$\sum e^{\lambda_k t} p_k(t) + \sum e^{\lambda_l t}[q_l(t)\cos\omega_l t + r_l(t)\sin\omega_l t]$$

где p_k вещественный многочлен степени меньше ν_k, а степени r_l, q_l меньше μ_l.

Лекция седьмая, 21 октября

Задача. Одно уравнение порядка n

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x$$

эквивалентно уравнению (т.е. линейной системе)

$$\dot{v} = Av.$$

Найдите матрицу A. Найдите ее характеристический многочлен – ответ:

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n.$$

0. Экспонента. Уравнение на плоскости с клеткой - повторить и показать или спросить, как получить фазовый портрет предельным переходом.

Дальше – недоговоренное из предыдущей лекции.

10. Напомнить (в смысле – задача) как вычисляется и выглядит экспонента от жордановой клетки умноженной на t: верхнетреугольная матрица с коэффициентами $t^k/k! e^{\lambda t}$.

Замечание. Жорданова клетка с собственным числом λ это матрица дифференцирования в пространстве квазимногочленов $e^{\lambda t} p(t)$ с базисом $e^{\lambda t} \frac{t^k}{k!}$. Его экспоненту мы уже считали (где?).

Следствие. Если λ_i корни характеристического многочлена (вообще говоря комплексного) оператора A с кратностями ν_i то элементы матрицы e^{At} есть сумма квазимногочленов с показателями λ_i и степенями меньше ν_i.

Задача. Для вещественного оператора вещественная и мнимая часть решения является решением.

Пусть λ_k вещественные собственные числа вещественного оператора A с кратностями ν_k, $\lambda_l \pm i\omega_l$ комплексные собственные числа с кратностями μ_l. Тогда каждый элемент матрицы e^{At} и каждая компонента решения является суммой комплексных квазимногочленов с показателями λ_k, $\lambda_l \pm i\omega_l$ и степеней меньше ν_k, μ_l соответственно.

Вещественные формулы для матричных элементов и компонент решения таковы:

$$\sum e^{\lambda_k t} p_k(t) + \sum e^{\lambda_l t} [q_l(t) \cos \omega_l t + r_l(t) \sin \omega_l t]$$

где p_k вещественный многочлен степени меньше ν_k, а степени r_l, q_l меньше μ_l

11. Одно уравнение порядка n

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x$$

эквивалентно системе уравнений

$$\dot{x} = Ax$$

с матрицей A – над диагональю стоят единицы, в последней строке перевернутые (!!) по порядку коэффициенты характеристического многочлена (a_1 – в конце)

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n$$

Задачи. Исходное уравнение имеет решение $e^{\lambda t}$ если и только если λ корень этого характеристического многочлена. Его кратность равна размеру клетки. Не может быть двух клеток с одним собственным числом.

Возвратные последовательности это последовательности, удовлетворяющие следующему соотношению

$$x_n = a_1 x_{n-1} + ... + a_k x_{n-k}.$$

Теория возвратных последовательностей очень близка с теорией одного дифференциального уравнения – дифференциальный оператор есть предел дискретного оператора.

Возвратному уравнению тоже сопоставляется многочлен –

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + ... + a_k.$$

Его корни тоже соответствуют замечательным возвратным последовательностям (каким?).

2. Вернемся к одному линейному уравнению порядка n, но на этот раз неавтономному.

Теорема. Решения уравненения

$$x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + ... + a_n(t) x = 0$$

составляет в C^∞ линейное пространство размерности n.

Сопоставим функции φ ее набор производных $\varphi(0), D\varphi(0), (D^2\varphi)(0), ..., (D^{n-1}\varphi)(0)$ получим отображение из пространства решений в $\mathbb{C}^n$, это отображение линейно, а образ его все. Т.к. по теореме существования такое решение есть. Ядро этого отображения равно нулю по теореме единственности.

Если $\lambda_1, ..., \lambda_k$ корни характеристического многочлена, а $\nu_1, ..., \nu_k$ их кратности, то каждое решение уравнения единственным образом записывается в виде суммы многочленов с показателями λ_i и степенями меньше ν_i.

3. Неоднородные уравнения. Пусть уравнение

$$x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + ... + a_n(t) x + b(t) = 0.$$

Сформулируйте теорему, обобщающую предыдущую.

Задача. Пусть все коэффициенты постоянны и добавленный член $b(t)$ это квазимногочлен с известными степенями и показателями. Как решать такое уравнение?

Задача. Сформулируйте и решите аналогичную задачу для возвратных последовательностей.

Устойчивость положений равновесия

$$\dot{x} = v(x), v(0) = 0$$

Положение равновесия 0 называется устойчивым (устойчивым по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что решение с начальным условием $|\varphi(0)| < \delta$ продожается на всю положительную полуось и не выходит за ϵ-сферу.

От этого отличается определение асимптотической устойчивости: которая есть устойчивость по Ляпунову плюс решения с достаточно малым начальным условием стремятся в ноль.

Задачи. Определить устойчивость нулевого решения следующих уравнений $\dot{x} = 0$, $\dot{x} = \pm x$, $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 \\ \dot{x_2} = -x_2 \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -\sin x_1 \end{cases}$.

Теорема об устойчивости по первому приближению. Пусть все собственные числа оператора A лежат в левой полуплоскости. Тогда положение равновесия асимптотически устойчиво.

Лемма. Пусть A вещественный линейый оператор, все собственные числа имеют положительную вещественную часть. Тогда найдется положительно определенная квадратичная форма Q, что $L_{Ax}Q > 0$ (при $x \neq 0$).

Лемма верна и в более общем комплексном случае. Пусть A комплексный оператор $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с положительными вещественными частями собственных чисел. Тогда найдется положительно определенная квадратичная вещественная форма, что ее производная Ли по A есть положительно определенная квадратачная форма.

Если собственные числа некратные то эту форму можно взять $\sum z_k \bar{z_k}$, где z_i собственные координаты. А если кратные то сопоставить близкий базис чтоб все остальные коэффициенты были малы и применить ту же форму, что и раньше.

Лекция восьмая, 28 октября

Интегральные поверхности поля направлений. Пусть V – гладкое поле направлений на многообразии M. Гладкое подмногообразие называется интегральным, если его касательное пространство содержит V.

Теорема 1. Y интегральное тогда и только тогда, когда вместе с каждой своей точкой содержит интервал интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Задача. Докажите теорему 1.

Пусть $\Gamma \subset M$ k-мерное подмногообразие. Задача Коши для поля направлений V с начальным многообразием Γ это задача об отыскании $(k+1)$-мерного интегрального многообразия, содержащего Γ. Точка многообразия Γ называется характеристической в поле направлений V, если $V \subset T\Gamma$ в этой точке.

Теорема 2. Существование и единственность решения задачи Коши в окрестности нехарактеристической точки.

Задача. Сформулируйте строго и докажите теорему 2.

Линейное однородное уравнение первого порядка.

$$L_v f = 0$$

В координатах

$$v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

По другому – это определение первого интеграла для v.

Задача Коши состоит в следующем: есть векторное поле v, функция φ задана на гиперповерхности (начальной), мы хотим продолжить ее в (хотя бы) окрестность этой поверхности, так что полученная гладкая функция f есть решение

$$L_v f = 0$$

.

Теорема 3. Существование и единственность решения задачи Коши в окрестности нехарактеристической точки этой гиперповерхности.

Задача. Сформулируйте строго и докажите теорему 3. Указание-план: в нехарактеристической точке вектор векторного поля v не равен нулю. Можно выпрямить поле v диффеоморфизмом так, чтобы поле v записывалось в виде $\frac{\partial}{\partial x_1}$, а гиперповерхность имела вид $x_1 = 0$. При этом уравнение будет иметь такой вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Линейное неоднородное уравнение первого порядка.

Это уравнение такого вида:

$$L_v f = h,$$

где v и h данные векторное поле и функция, а функция f неизвестна.

В координатах оно выглядит так:

$$v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = h$$

Функция f тоже задана на гиперповерхности.

Теорема 4. Задача Коши для этого уравнения имеет единственное решение в достаточно малой окрестности нехарактеристической точки. Это решение задается формулой:

$$f(g(x,t)) = \varphi(x) + \int\limits_0^t h(g(x,\tau))d\tau.$$

Тут $g(x,t)$ значение решения φ уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $\varphi(0) = x$ (x – точка гиперповерхности) в момент времени t.

Квазилинейное уравнение первого порядка.

Это уравнение на функцию u, заданную на области (многообразии) M

$$L_\alpha u = \beta$$

где $\alpha(x) = a(x, u(x))$, $\beta(x) = b(x, u(x))$. Точка x – точка многообразия M, u – функция на M. В координатах

$$a_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + a_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x,u)$$

Пример. Поле скоростей u среды из невзаимодействующих частиц удовлетворяет уравнению:

$$uu_x + u_t = 0$$

Скорость каждой частицы постоянна, обозначим скорость частицы находящейся в момент t в точке x через $u(x,t)$. Уравнение Ньютона: ускорение частицы равно нулю. Если $x = \varphi(t)$ – движение частицы то $\dot{\varphi} = u(\varphi(t), t)$ и

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\dot{\varphi} + \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Характеристики квазилинейного уравнения первого порядка.

$$L_{a(x,u(x))}u = b(x, u(x))$$

главное наблюдение состоит в следующем – если точка x выходит из x_0 со скоростью $a(x_0, u_0)$ то решение выходит из u_0 со скоростью $b(x_0, u_0)$.

Рассмотрим вектор в $M \times \mathbb{R}$ с компонентой $a(x_0, u_0)$ вдоль M и $b(x_0, u_0)$ вдоль $\mathbb{R}$. Это характеристический вектор квазилинейного уравнения первого порядка, эти вектора задают уравнение характеристик, их решения называются характеристиками.

Задача. Вычислить характеристики для уравнения из прошлого примера.

Теорема 5 График решения квазилинейного уравнения является интегральной поверхностью его характеристического поля направлений.

Задача. Докажите теорему 5.

Лекция девятая, 11 ноября

Дифференциальные формы

Пусть есть открытое множество $M \subset \mathbb{R}^n$. Векторное поле v – это такой объект: каждой точке $x \in M$ сопоставлен вектор $v(x) \in T_xM^n$, обычно мы рассматриваем гладкие векторные поля, это можно определить так: для разложения

$$v(x) = v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + v_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

векторного поля v по базисным векторным полям $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ все функции $v_1, ..., v_n$ являются гладкими. Можно определить иначе: векторное поле v гладкое, если для любой гладкой функции f функция $L_v f$ (производная Ли функции f вдоль векторного поля v) тоже гладкая.

Задача. Докажите, что сформулированные определения гладкости эквивалентны.

Теория дифференциальных уравнений изучает и другие дифференциальные объекты. Мы рассмотрим, для начала, дифференциальные 1-формы.

Если векторное поле это элемент касательного пространства T_xM, зависящий от точки $x \in M$, то дифференциальная 1-форма α это элемент $\alpha(x)$ пространства T_x^*M, двойственного касательному пространству T_xM, гладко зависящий от точки $x \in M$. Тут гладкость надо понимать следующим образом: для любого гладкого векторного поля v функция $x \mapsto \alpha(x)(v(x))$ является гладкой. Дифференциальные 1-формы можно, таким образом, спаривать с векторными полями и получать функции.

Для каждой точки $x \in M$ векторное пространство T_xM^n обладает базисом $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ (который правильнее, но длиннее, было бы обозначать $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$. Следовательно, двойственное пространство T_x^*M – которое называется кокасательным пространством в точке x – обладает двойственным базисом, который принято обозначать $dx_1, ..., dx_n$ (хотя правильнее, но длиннее, было бы его обозначать $dx_1(x), ..., dx_n(x)$). Этот базис определен соотношениями $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$.

Дифференциальную 1-форму α можно разложить в каждой точке по этому базису:

$$\alpha(x) = a_1(x)dx_1 + ... + a_n(x)dx_n$$

и на первый взгляд дифференциальные 1-формы очень похожи на векторные поля – их тоже можно умножать на гладкие функции и складывать (то есть они образуют модуль над кольцом гладких функций).

Задача. Рассмотрим отображение

$$F\colon Vect(M) \to C^\infty(M),$$

удовлетворяющее условию $F(fv) = fF(v)$ для всех функций $f \in C^\infty(M)$ и векторных полей $v \in Vect(M)$. Верно ли, что для такого отображения F найдется дифференциальная 1-форма α, что $F(v)(x) = \alpha(x)(v(x))$?

Напомним, что в линейной алгебре векторному пространству V (над полем $\mathbb{R}$) сопоставляют пространства внешних форм $\Lambda^k(V)$, элементы которого являются функциями на $V \times V \times ... \times V$ (k сомножителей), которые линейны по каждому аргументу (это определение тензорной k-формы) и обращаются в нуль при совпадении любых двух аргументов (это условие выделяет внешние формы из тензорных форм).

Задача. Вспомните почему размерность $\dim \Lambda^k(V)$ равна $C^k_{\dim V}$.

Дифференциальной k-формой ω на M называется элемент $\omega(x) \in \Lambda^k(T_xM)$, гладко зависящий от $x \in M$, то есть функция

$$x \mapsto \omega(x)(v_1(x), v_2(x), ..., v_k(x))$$

гладкая при любых гладких векторных полях $v_1, ..., v_k \in Vect(M)$. Множество всех дифференциальных k-форм на M является модулем над кольцом гладких функций $C^\infty(M)$ и обозначается $\Omega^k(M)$. Ноль-формами называют функции на M, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

Касательные векторы при гладком отображении $F\colon M \to N$ "едут в сторону отображения": для вектора $v \in T_x$ вектор $F_*(v)$ лежит в пространстве $T_{F(x)}N$. С векторными полями дело обстоит хуже – из векторного поля на M вообще говоря не получается векторное поле на N, так выйдет если отображение F – диффеоморфизм. Из дифференциальной k-формы ω на N однако же с помощью любого гладкого отображения $F\colon M \to N$ определяется прообраз формы ω при F. Обозначается эта форма как $F^*\omega$ и определяется равенством

$$F^*\omega(x)(v_1, ..., v_k) = \omega(F(x))(F_*v_1, ..., F_*v_k).$$

Над дифференциальными формами можно делать то же самое, что и с внешними формами, например умножать внешним образом, чтобы внешне перемножить две дифференциальные формы нужно перемножить в каждой точке соответствующие внешние формы. Напомним, что внешнее произведение внешних форм $\alpha \in \Lambda^k(V)$ и $\beta \in \Lambda^l(V)$ это внешняя форма

$$\alpha \wedge \beta(v_1, ..., v_{k+l}) = \sum sign(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}\beta(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+1)}),$$

где суммирование пробегает по всем перестановкам $\sigma \in S_{k+1}$, таким что

$$\sigma(1) < ... < \sigma(k) \;\; \sigma(k+1) < ... < \sigma(k+l).$$

Задача. Сколько членов в этой сумме?
Задача. Почему внешнее умножение ассоциативно? Коммутативно ли внешнее умножение?
Задача. Любая гладкая дифференциальная форма записывается однозначно в виде

$$\sum_{i_1 < ... < i_k} f_{i_1,...,i_k}(x_1, ..., x_n)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

для соответствующих гладких функций $\{f_{i_1,...,i_k}\}$.

Если есть дифференциальная форма $\omega \in \Omega^k(M)$ и векторное поле $v \in Vect(M)$, то подстановка векторного поля v в ω это дифференциальная $(k-1)$-форма $i_v\omega \in \Omega^{k-1}(M)$, определенная соотношением

$$i_v\omega(v_1, ..., v_{n-1}) = \omega(v, v_1, ..., v_{n-1})$$

для (произвольных) векторных полей $v_1, ..., v_{n-1}$. **Задача.** Чему равно $i_v(\alpha \wedge \beta)$?
Задача. Как вычислять $i_v\omega$? Например, вычислите для $v = x_2^2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}$ и $\omega = x_3dx_1 + x_1^2dx_2 - 3x_2dx_3$ или $\omega = x_3dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2dx_2 \wedge dx_3 - 3x_2dx_3 \wedge dx_1$ или $\omega = x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Наконец, внешнее дифференцирование – оператор d, делающий из k-формы $(k+1)$-форму, проще всего (не значит – лучше!) его определить в координатах: для функции f:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

а для формы степени $k > 0$ внешнее дифференцирование определяется так:

$$d(\sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_n)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} df_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_n) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Задача. Проверьте, что внешнее дифференцирование коммутирует с прообразом:

$$dF^*\omega = F^*d\omega$$

для любого отображенияF и любой дифференциальной формы ω.

Еще одно определение одной важной операции над дифференциальными формами – производная Ли дифференциальной формы вдоль векторного поля. Векторное поле порождает (локально) однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\{g_v^t\}$ (определенную при малых t, причем эта малость зависит от точки).

$$L_v\omega = \lim_{t\to 0} \frac{(g_v^t)^*\omega - \omega}{t}.$$

Вообще говоря нет никаких шансов найти явно отображения $\{g_v^t\}$ и вычислить $(g_v^t)^*\omega$. Однако предел найти можно! Более того, в дифференциальной геометрии доказывается "формула Картана":

$$L_v = i_v \circ d + d \circ i_v.$$

Векторные поля удобны для задания поля направлений. Дифференциальные 1-формы очень удобны для задания, так называемых распределений (=полей) касательных гиперплоскостей: пусть есть (не равная нулю в рассматриваемой точке, а значит и в окрестности этой точки) дифференциальная 1-форма α. Ее значение в точке $x \in M$ это ковектор $\alpha(x) \in T_x^*M$. Ядро этого ковектора это гиперплоскость в касательном пространстве T_xM. Если есть поле касательных гиперплоскостей ξ, которое удобно задавать как поле ядер 1-формы α, то встает вопрос о существовании так-называемых интегральных гиперповерхностей для ξ. Гладкая гиперповерхность Γ называется интегральной для поля касательных гиперплоскостей, если $T_x\Gamma = \xi(x)|$ в любой точке $x \in \Gamma$.

Задача. Доказать, что у поля гиперплоскостей, определенного 1-формой $dx - ydz$, вообще нет интегральных гиперповерхностей.

Тем замечательнее следующая теорема Фробениуса.

Теорема. Пусть поле касательных плоскостей задано как поле ядер 1-формы α. Тогда это поле интегрируемо, то есть через каждую точку проходит интегральная гиперповерхность, если и только если

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

Представляет несомненный интерес и следующая эквивалентная формулировка этой теоремы. Поле касательных гиперплоскостей можно задать (локально), указав базисные векторные поля $v_1, \ldots, v_{n-1}$, $\xi(x) = \langle v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)\rangle$. Тогда это поле интегрируемо, если при любых i, j и точке x $[v_i, v_j](x) \in \xi(x)$

Лекция десятая, 18 ноября

Еще раз о теореме Фробениуса

Пусть в каждой точке x нашего открытого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ задана касательная гиперплоскость $\xi(x)$ и эта гиперплоскость "гладко зависит от точки". Такую стуктуру часто называют распределением касательных гиперплоскостей.

Задача. Докажите, что локально, в достаточно-малой окрестности любой точки, найдется такая 1-форма α, что

$$\xi(x) = \mathrm{Ker}(\alpha(x)).$$

Докажите, что глобально таких форм может не быть. Даже локально такая форма α не одна, подойдет любая форма, пропорциональная форме α в каждой точке, то есть, получающаяся умножением на нигде ненулевую функцию.

Другой способ задания нашего распределения ξ это выбрать $n-1$ векторное поле $v_1, ..., v_{n-1}$ и потребовать, чтобы в каждой точке x

$$\langle v_1(x), ..., v_{n-1}(x) \rangle = \xi(x),$$

то есть векторы $v_1(x), ..., v_{n-1}(x)$ это базис в $\xi(x)$. Так всегда можно задать распределение ξ локально, а глобально не всегда (но эти "не всегда"вообще говоря отличаются для заданий с помощью формы и для заданий с помощью векторных полей – почему?).

Подмногообразие $\Gamma^k \subset M$ называется интегральным для распределения ξ, если оно касается этого распределения, т.е.

$$T_x\Gamma^k \subset \xi(x)$$

при любом $x \in \Gamma^k$.

Распределение ξ называется вполне интегрируемым, если через любую точку проходит интегральное многообразие размерности $n-1$.

Оказывается, что начиная с $n = 3$ вполне интегрируемые распределения очень редко встречаются, этому неформальному утверждению можно придать строгий смысл, но мы сейчас не будем этим заниматься. Тем не менее, можно сказать сразу же – является распределение вполне интегрируемым или нет. Это можно сделать и на "языке форм"и на "языке векторных полей".

Теорема Фробениуса. Пусть поле касательных плоскостей ξ задано как поле ядер 1-формы α. Тогда это поле вполне интегрируемо если и только если

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

Задача. Докажите (независимо от теоремы Фробениуса), что это условие одновременно справедливо для всех 1-форм, задающих ξ.

Задача. Докажите, что условие $\alpha \wedge d\alpha = 0$ эквивалентно условию $d\alpha|_{\xi(x)} = 0$. То есть, фактически, условие в теореме Фробениуса это условие на 2-форму, а не на 3-форму.

Вопрос. Верно ли, что формы $d\alpha|_{\xi(x)}$ и $df\alpha|_{\xi(x)}$ пропорциональны с ненулевым коэффициентом (f ненулевая функция)? Тут мы не предполагаем, что ξ вполне интегрируемо.

До обсуждения доказательства теоремы Фробениуса обсудим задачу из прошлой лекции – у распределения двумерных плоскостей, заданных 1-формой, $dz - ydx$ в трехмерном пространстве с координатами x, y, z, нет ни одного двумерного интегрального многообразия (даже маленького кусочка). Докажем это от противного – если бы такое интегральное многообразие бы было, то оно являлось бы локально графиком функции от x, y (почему?), то есть $z = f(x, y)$. Значит, $df - ydx = 0$ (это условие касания нашего распределения ξ), а значит, тем более и $d(df - ydx) = 0$, но $d(df - ydx) = dy \wedge dx$ нигде ненулевая 2-форма.

План доказательства теоремы Фробениуса. Доказательство теоремы Фробениуса основано на следующей идее, на следующей конструкции. Пусть есть (непонятно откуда взявшееся) интегральное подмногообразие Γ^k размерности k у распределения ξ и точка $x_0 \in \Gamma^k$. И пусть еще есть векторное поле (тоже непонятно откуда взявшееся) v в окрестности точки x_0, лежащее в ξ и трансверсальное Γ^k в точке $x_0 \in \Gamma^k$. То есть, $v(x) \in \xi(x)$ при всех x из некоторой окрестности точки x_0 и $v(x_0) \notin T_{x_0}\Gamma^k$. Напомню, что мы предполагаем справедливым условие теоремы Фробениуса. В такой ситуации (возможно в меньшей окрестности) можно построить интегральное многообразие Γ^{k+1} для ξ размерности на единицу больше, содержащее исходное интегральное многооообразие Γ^k и такое, что в каждой своей точке $x \in \Gamma^{k+1}$ вектор $v(x)$ касается Γ^{k+1}, то есть $v(x) \in T_x\Gamma^{k+1}$. Более того, такое Γ^{k+1} локально единственно (любые два таких многообразия совпадают в некоторой окрестности точки x_0). Построить такое многообразие Γ^{k+1} очень просто – надо взять объединение интервалов фазовых кривых поля v, проходящих через v. Условие же из теоремы Фробениуса нужно для того, чтобы показать, что это многообразие Γ^{k+1} интегрально (если условие теоремы Фробениуса не выполнено, то вообще говоря Γ^{k+1} не обязано быть интегральным) –

Задача. Приведите для распределения $dz - ydx = 0$ пример интегрального многообразия Γ^1, векторного поля v, трансверсального Γ^1 и лежащего в $dz - ydx = 0$, что Γ^2 неинтегральное и явно построено.

Таким образом, приведенное рассуждение позволяет повысить размерность интегрального многооообразия на 1. Чтобы его применить снова нужно взять другое векторное поле, поскольку v уже касается построенного интегрального многообразия. Это можно сделать (как?). Так, стартуя с самого простого интегрального многообразия Γ^0 – точки x_0, индуктивно доходим до интегральной гиперповерхности Γ^{n-1}, проходящей через x_0