Обыкновенные дифференциальные уравнения 2020, листок 4 (30 сентября)

Задача 1. Приведите пример автономного векторного поля на прямой, решения которого не продолжаются ни вперед ни назад неограниченно.

Задача 2. Пусть решение φ уравнения $\dot{x} = v(x,t)$, определено на интервале, содержащем отрезок $[a,b]$. Верно ли, что решения с близкими начальными условиями определены на $[a,b]$ (т.е. найдется такое положительное ε, что при любом $t_0 \in [a,b]$ найдется решение $\psi(t)$, определенное на всем $[a,b]$, такое что $|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \varepsilon$)?

Задача 3. Для уравнения маятника $\ddot{x} = -\sin(x)$ пусть $T(a)$ – наименьший период решения с начальным условием $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$. Найдите предел $T(a)$ при $a \to 0$.

Задача 4. Какие из следующих векторных полей переводятся друг в друга диффеоморфизмами прямой? Векторные поля – $sin(x)\frac{\partial}{\partial x}$, $2sin(x)\frac{\partial}{\partial x}$, $sin^2(x)\frac{\partial}{\partial x}$.

Задача 5. Докажите, что гладкое векторное поле $v(x)\frac{\partial}{\partial x}$ на прямой, растущее на бесконечности не быстрее линейного (т.е. $|v(x)| < a + b|x|$ при подходящих a и b и всех x), определяет фазовый поток на прямой.

Задача 6. Докажите, что решение линейного неавтономного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ $A(t)$ – гладко зависящий от параметра t линейный оператор) продолжаются вперед и назад неограниченно.