Обыкновенные дифференциальные уравнения 2020, листок 7 (18 ноября)

Задача 1. Точка ноль является особой точкой векторных полей фазовых потоков g_1^t, g_2^t. Пусть эти потоки дифференцированно эквалентны, т.е. $h \circ g_1^t = g_2^t \circ h$ для некоторого диффеоморфизма h, при чем $h(0) = 0$). Будут ли фазовые потоки линеаризаций этих векторных полей в нуле линейно эквивалентны?

Задача 2. Какие из положений равновесия для векторного полей на плоскости: $y\frac{\partial}{\partial x} - \sin x \frac{\partial}{\partial y}$, $y\frac{\partial}{\partial x} - x^n \frac{\partial}{\partial y}$ устойчивы по Ляпунову? ассимптотически устойчивы?

Задача 3. Верно ли, что из устойчивости по Ляпунову линеаризации в неподвижной точке вытекает устойчивость по Ляпунову для исходного уравнения?

Задача 4. Пусть A, B операторы на плоскости с ненулевыми чисто мнимыми собственными числами. Верно ли, что соответствующие линейные векторные поля $\dot{x} = Ax$ и $\dot{x} = Bx$ топологически эквивалентны?

Задача 5. Пусть f – квадратичная форма, и квадратичная форма $L_{Ax}f$ положительно определена. Докажите, что если все абсолютные значения всех коэффициентов оператора B достаточно малы, то $L_{Ax+Bx}f$ также будет положительно определенной квадратичной формой.

Задача 6. Пусть f – положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$ и для оператора A выполняется условие $(L_{Ax}f)(x) > 0$ при $x \neq 0$. Зададим отображение $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ условием: h неподвижно на сфере $S = \{x | f(x) = 1\}$, $f(e^{At}x) = e^t x$ при всех $t, \in S$ и $h(0) = 0$. Докажите, что h – гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$.

Задача 7. Пусть точка 0 – особая точка для гладкого поля v, и линеаризация поля v в точке ноль равна нулю. Докажите (или опровергните), что для любой положительно определенной квадратичной формы f и $c > 0$ найдется такая окрестность нуля, что $|L_v f(x)| \geq cf(x)$ при всех x из этой окрестности.