Введение в теорию Морса

С. В. Смирнов
НМУ, осенний семестр 2020/21

Часть II

1. Привести пример функции Морса–Ботта на сфере S^n, не являющейся функцией Морса.

2. Пусть $p : M \to N$ — локально тривиальное расслоение, M и N — гладкие многообразия, $f : N \to \mathbb{R}$ — функция Морса. Доказать, что $f \circ p$ является функцией Морса–Ботта.

3. Доказать, что функция $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}$, задаваемая формулой
$$f(z_0 : z_1 : \cdots : z_n) := \frac{c_0|z_0|^2 + c_1|z_1|^2 + \cdots + c_n|z_n|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2},$$
где $c_i \in \mathbb{R}$ — произвольные числа (среди которых могут быть совпадающие), является функцией Морса–Ботта.

4. Пусть A — самосопряженный оператор на евклидовом пространстве V. Определим на единичной сфере $\{v \in V \mid |v| = 1\} \subset V$ функцию $f(v) := (Av, v)$. Является ли она функцией Морса–Ботта на сфере?

5. Пусть A — самосопряженный оператор на евклидовом пространстве V. Определим функцию $f_A : G_k(V) \to \mathbb{R}$ следующим образом:
$$f_A(U) := \operatorname{tr}(A \circ P_U),$$
где P_U — оператор ортогонального проектирования на k-мерное подпространство U. Доказать, что f_A является функцией Морса-Ботта на грассманиане $G_k(V)$.

6. Выписать явную формулу для ограничения функционала действия $\mathcal{S}$ на пространство кусочно-геодезических путей $\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$, идущих из точки $P = \gamma(t_0)$ в точку $Q = \gamma(t_k)$, в терминах расстояний между точками $\gamma(t_{i-1})$ и $\gamma(t_i)$.

7. Доказать, что пространство петель на сфере Ω гомотопически эквивалентно клеточному комплексу, состоящему из клеток размерностей 0, $n-1$, $2(n-1)$, $3(n-1)$,… (по одной клетке в каждой размерности).

8. Пусть M — геодезически полное многообразие. Доказать, что точка $P \in M$ сопряжена с точкой $\exp \xi$ вдоль геодезической $\exp(t\xi)$ тогда и только тогда, когда $\xi \in T_P M$ является критической точкой для отображения $\exp : T_P M \to M$. Вывести отсюда, что почти все точки $Q \in M$ не являются сопряженными P ни вдоль какой геодезической.

9. Пусть для произвольных векторных полей ξ, η на некотором римановом многообразии M величина $(R(\xi, \eta)\xi, \eta)$ неположительна во всех точках этого многообразия (здесь R — тензор кривизны). Доказать, что никакие две точки M не сопряжены ни вдоль какой геодезической.

10. Пусть M — симметрическое пространство, P — произвольная его точка, а γ — геодезическая, удовлетворяющая условию $\gamma(0) = P$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — положительные собственные значения линейного оператора A_γ, определяемого формулой $A_\gamma(\xi) := R(\dot\gamma(0), \xi)\dot\gamma(0)$ для произвольного $\xi \in T_P M$, где R — тензор кривизны M. Доказать, что точки, сопряженные P вдоль γ, имеют вид $\gamma(\frac{\pi k}{\sqrt{\lambda_i}})$ для некоторого $i = 1, \ldots m$ (здесь k — ненулевое целое число).