Введение в теорию Морса

С. В. Смирнов
НМУ, осенний семестр 2020/21

Часть I

Дисклеймер: некоторые из приведенных ниже вопросов совсем простые и не могут претендовать на статус задачи.

1. Пусть M — замкнутое подмногообразие в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а $f : P \to \|AP\|$ — некоторая функция Морса на нем (здесь $A \in \mathbb{R}^n$ — фиксированная точка). Может ли количество особых точек функции f зависеть от выбора точки A.
2. Может ли гладкая функция на многообразии не иметь критических точек?
3. Пусть $v \in \mathbb{R}$ — некоторый фиксированный вектор. Будет ли функция $f : SO(n) \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством $f(A) := (Av, v)$, где $(\cdot, \cdot)$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, функцией Морса на $SO(n)$?
4. Пусть N — замкнутое подмногообразие компактного многообразия M, а $f : M \to \mathbb{R}$ — функция Морса. Будет ли ограничение $f|_N$ задавать функцию Морса на N?
5. Доказать, что на произвольном многообразии существует функция Морса, для которой все подуровневые многообразия $f^{-1}(-\infty, a]$ компактны.
6. Доказать, что на произвольном подмногообразии в евклидовом пространстве существует функция высоты, являющаяся функцией Морса.
7. Доказать, что если на компактном многообразии существует функция Морса с двумя критическими точками, то оно гомеоморфно сфере.
8. Может ли на сфере с двумя ручками существовать морсовская функция с пятью критическими точками?
9. Пусть f — функция Морса на n-мерном торе T^n. Какие минимальное количество особых точек она может иметь?
10. Построить функцию Морса на $S^2 \times S^4$, найти ее критические точки и вычислить их индексы.
11. Рассмотрим шарнирный механизм $A_0A_1A_2A_3$ на плоскости, в котором точка A_0 закреплена в начале координат, точка A_3 перемещается по оси абсцисс, и длины d_i всех ребер A_iA_{i+1} постоянны (углы между ребер могут как угодно меняться). При каких значениях d_1, d_2, d_3 конфигурационное пространство M данного шарнирного механизма является гладким многообразием? Для функции $f : M \to \mathbb{R}$, вычисляющей расстояние от точки A_3 до начала координат, найти критические точки и их индексы.
12. Рассмотрим шарнирный механизм $A_0A_1A_2A_3A_4$ на плоскости, в котором точка A_0 закреплена в начале координат, точка A_4 перемещается по оси абсцисс, и длины d_i всех ребер A_iA_{i+1} постоянны (углы между ребер могут как угодно меняться). При каких значениях d_1, d_2, d_3, d_4 конфигурационное пространство M данного шарнирного механизма является гладким многообразием? Для функции $f : M \to \mathbb{R}$, вычисляющей расстояние от точки A_4 до начала координат, найти критические точки и их индексы.
13. Построить функцию Морса на группе $U(n)$ и найти индексы ее критических точек.

14. Рассмотрим пространство симметричных изоспектральных пятидиагональных матриц $M_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$. Доказать, что если все собственные значения различны, то $M_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$ является гладким многообразием. Построить функцию Морса на нем, найти ее критические точки и вычислить их индексы.

15. Доказать теорему Смейла о существовании градиентного векторного поля, для которого стабильные и нестабильные подмногообразия, соответствующие различным критическим точкам, трансверсальны, в общем случае, т.е. когда несколько критических точек могут соответствовать одному критическому значению.

16. Вычислить непосредственно морсовские гомологии кренделя (т.е. сферы с двумя ручками), вложенного в трехмерное пространство “почти вертикально”.

17. Используя комплекс Морса, доказать, что линзовые пространства $L(p, q)$ и $L(p_1, q_1)$ не гомеоморфны при $p_1 \neq p$.