Семинар 10. Целые алгебраические и не только

Задача 10.1. Пусть $\mathbb{F} := \Bbbk(\alpha)$ – примитивное расширение, порожденное элементом α. Пусть $\Bbbk \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{F}$ – промежуточное поле. Рассмотрим минимальный многочлен для α над полем $\mathbb{L}$:

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{L}[x].$$

Докажите, что $\mathbb{L}$ совпадает с полем $\Bbbk[a_0, \ldots, a_{n-1}]$. Выведите отсюда, что число промежуточных подполей в конечном примитивном расширении конечно.

Задача 10.2. Для бесконечного поля $\Bbbk$ характеристики p предъявите в конечном расширении $\Bbbk(x, y)/\Bbbk(x^p, y^p)$ бесконечное количество промежуточных подполей и докажите, что рассмотренное расширение не примитивно.

Задача 10.3. Пусть G – конечная абелева группа. Докажите, что найдется

(а) натуральное число N и сюрьективный гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})^* \twoheadrightarrow G$;

(б) расширение Галуа $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$ с группой Галуа G.

Задача 10.4. Пусть $\xi = \exp(\frac{2\pi i}{p})$ – примитивный корень из единицы простой степени p.

(а) Опишите форму следа для расширения $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ и вычислите её определитель;

(б)** Докажите, что кольцо целых в этом расширении порождено ξ.

Задача 10.5. Опишите кольцо целых алгебраических для квадратичного расширения

(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$, **(б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{7})/\mathbb{Q}$.