Семинар 11. Приложения к теории представлений

Задача 11.1. Пусть $\mathbb{F}/\Bbbk$ – расширение Галуа с группой Галуа G. С каждым элементом g группы G свяжем $\mathbb{F}$-линейный эндоморфизм $\lambda_g : \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F} \to \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}$ сопоставляющий разложимому тензору $a \otimes b \mapsto a \otimes g(b)$.

Докажите, что

(а) сопоставление $g \mapsto \lambda_g$ задаёт $\mathbb{F}$-линейное действие группы G на $\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F}$;

(б) композиции λ_g и произведения $\mu : \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F} \xrightarrow{a\otimes b \mapsto ab} \mathbb{F}$ образуют базис в пространстве функционалов $Hom_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}, \mathbb{F})$;

(в) отображение $\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F} \to \mathbb{F}[G]$ сопоставляющее тензору v сумму $\sum_g \lambda_g(v) g^{-1}$ является изоморфизмом G-модулей.

Задача 11.2. Докажите, что для любой конечной группы G существует конечное расширение $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$, такое что для любого конечномерного комплексного представления группы G существует базис, в котором все матричные элементы принадлежат $\mathbb{F}$.

Задача 11.3. Вычислите размерности всех неприводимых комплексных представлений неабелевой группы G порядка **(а)** p^3, где p – простое; **(б)** 147.