Семинар 13. Полупростые и центральные простые алгебры

Задача 13.1. Пусть $V_1,\dots,V_n$ – набор попарно неизоморфных комплексных представлений конечномерной алгебры A. Докажите, что неравенство $\sum \dim_{\mathbb{C}} V_i^2 \geqslant \dim_{\mathbb{C}} A$ влечет полупростоту алгебры A.

Задача 13.2. Алгебра H порождена образующими x, y с соотношениями $xy = \omega yx$ (где ω – примитивный кубический корень из единицы) и $x^3 = 1$, $y^3 = 1$. Докажите, что эта алгебра полупроста и разложите ее в прямую сумму матричных (основное поле равно $\mathbb{C}$).

Задача 13.3. Алгебра $D(\alpha,\beta)$ над полем $\Bbbk$ характеристики отличной от 2 порождена образующими i, j с соотношениями $ij = -ji$ и $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$. Докажите, что

(а) $D(\alpha,\beta)$ – является центральной простой алгеброй над $\Bbbk$ с базисом $1, i, j, ij$;

(б) $D(\alpha,\beta) \simeq Mat_2(\Bbbk)$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 + \alpha\beta t^2 = 0$ имеет ненулевое решение в $\Bbbk$.

(в) имеют место изоморфизмы

$$D(\alpha,\beta) \otimes_{\Bbbk} D(\alpha',\beta) \simeq Mat_2(D(\alpha\alpha',\beta)),$$
$$D(\alpha,\beta) \otimes_{\Bbbk} D(\alpha,\beta) \simeq Mat_4(\Bbbk).$$

Задача 13.4. Зафиксируем конечную группу G.

(а) Опишите матрицу $L(x)$ оператора действия умножения слева на элемент $\sum_{g\in G} x_g g$ в групповой алгебре $\mathbb{F}[G]$, где в качестве основного поля $\mathbb{F}$ взяты рациональные функции $\mathbb{C}(x_g|g \in G)$ от набора формальных переменных $\{x_g\}$, занумерованных элементами группы G.

(б) Докажите, что определитель $L(x)$ равен определителю матрицы $|x_{gh}|_{g,h\in G}$.

(в) Докажите, что если $V_1,\dots,V_k$ список неприводимых комплексных представлений группы G, то многочлен $\det|x_{gh}|$ раскладывается в произведение $\prod_{i=1}^{k}(p_i(x_g))^{\dim V_i}$, где степень $\deg p_i = \dim V_i$.

(г) Вычислите p_i для случая $G = S_3$; **(д)** Докажите, что p_i – неприводим для любого $i = 1,\dots,k$.