Семинар 4. Алгебраичекие числа и расширения

Задача 4.1. Найти минимальные многочлены для элементов:
(а) $5+3i$ над $\mathbb{R}$; **(б)** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ над $\mathbb{Q}$;
(в) $1+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ над $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$; **(г)** $1+\sqrt[3]{3}$ над $\mathbb{Q}[\sqrt{3}+\sqrt{5}]$;

Задача 4.2. Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется целым алгебраическим, если оно является корнем приведенного многочлена с целыми коэффициентами. Какие из следующих элементов являются целыми алгебраическими:
(а) $i+\sqrt[3]{2}$, **(б)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, **(в)** $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$.
Воспользуйтесь леммой Гаусса и покажите, что алгебраическое число α является целым алгебраическим если и только если его минимальный многочлен имеет целые коэффициенты.

Задача 4.3. Докажите, что для цепочки расширений полей $\mathbb{k} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ выполнено $\operatorname{tr.deg}(\mathbb{L}/\mathbb{k}) = \operatorname{tr.deg}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) + \operatorname{tr.deg}(\mathbb{F}/\mathbb{k})$.

Задача 4.4. Известно, что алгебраическое число α принадлежит расширению $\mathbb{L}/\mathbb{k}$, такому что $[\mathbb{L}:\mathbb{k}]$ – нечетно. Докажите, что степени минимальных многочленов для α и для α^2 совпадают.

Задача 4.5. Докажите для простого числа p, что многочлен $f(x) \in \mathbb{k}[x]$ неприводим или имеет корень в $\mathbb{k}$, если
(а) $f(x) = x^p - a \in \mathbb{k}[x]$;
(б) $f(x) = x^p - x - a$, но при условии, что характеристика поля $\mathbb{k}$ равна p.
Указание: рассмотрите расширение $\mathbb{k}(\alpha)/\mathbb{k}$, где α – корень многочлена.