Семинар 7. Расширения сепарабельные и Галуа

Задача 7.1. Известно, что расширения $\mathbb{F}/\Bbbk$ и $\mathbb{L}/\Bbbk$ – сепарабельные. Покажите, что алгебра $\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{L}$ – полупроста.

Задача 7.2. Докажите, что неприводимый многочлен $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ имеет кратный корень если и только если $\mathsf{char}\mathbb{F} = p > 0$ и найдется такой многочлен $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, такой что $f(x) = g(x^p)$.

Задача 7.3. Покажите, что расширение $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$ является расширением Галуа и найдите группу Галуа этого расширения для:
(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; **(б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Задача 7.4. Найдите группу Галуа поля разложения многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$:
(а) $f(x) = x^3 - 2$; **(б)** $f(x) = x^4 - 2$; **(в)** $f(x) = x^n - 1$; **(г)*** $f(x) = x^p - 2$.

Задача 7.5. Покажите, что поле разложения многочлена

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 \in \mathbb{F}(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

является расширением Галуа над полем рациональных функций от n переменных $\mathbb{F}(a_0, \ldots, a_{n-1})$, группа Галуа которого совпадает с симметрической $\mathbb{S}_n$.

Указание: Воспользуйтесь основной теоремой о симметрических функциях.