Семинар 8. Соответствие Галуа

Задача 8.1. Вычислите степень минимального многочлена над $\mathbb{Q}$ у следующих чисел

(а) $\sqrt{p_1}+\ldots+\sqrt{p_k}$, где $p_1,\ldots,p_k$ попарно взаимнопростые числа большие 1 и свободные от квадратов;

(б) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$;

(в) $\xi+\bar{\xi}$, где ξ – примитивный корень 11-ой степени из единицы.

Задача 8.2. Известно, что для многочлена $f(x)\in\Bbbk[x]$ степени n степень расширения поля разложения $\Bbbk_f/\Bbbk$ равна $n!$. Докажите, что $f(x)$ – неприводимый, $\Bbbk_f/\Bbbk$ – расширение Галуа и вычислите его группу Галуа.

Задача 8.3. Предъявите расширения Галуа поля $\mathbb{Q}$, группа Галуа которых равна

(а) $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})\times\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, **(б)** $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$, **(в)** S_3, **(г)** A_4, **(д)** D_4.

Задача 8.4. Пусть $\mathbb{L}$ – конечное расширение Галуа поля $\mathbb{R}$, содержащее $\mathbb{C}$. Докажите,

(а) что у поля $\mathbb{R}$ не бывает расширений нечётной степени;

Указание: Воспользуйтесь теоремой о промежуточном значении из анализа и покажите, что над $\mathbb{R}$ не бывает неприводимых многочленов нечётной степени;

(б) что расширение $\mathbb{L}/\mathbb{C}$ – расширение Галуа степени 2^n;

(в) основную теорему Алгебры, то есть, что поле $\mathbb{C}$ – алгебраически замкнуто.

Указание: покажите явно, что поле $\mathbb{C}$ не имеет квадратичных расширений.

Задача 8.5. Пусть $\mathbb{F}/\Bbbk$ – расширение Галуа с группой Галуа G и $H\subset G$ – некоторая её подгруппа.

(а) Покажите, что сопоставление $x\mapsto \mathrm{Tr}(L_x)$ (след оператора L_x умножения слева на элемент x) задаёт $\mathbb{F}^H$-линейное сюрьективное отображение $\mathrm{Tr}:\mathbb{F}\to\mathbb{F}^H$;

(б) Если $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – базис $\mathbb{F}/\Bbbk$, то $\mathrm{Tr}(\alpha_1),\ldots,\mathrm{Tr}(\alpha_n)$ порождают $\mathbb{F}^H$.