Семинар 9. Вычисление групп Галуа

Задача 9.1. Докажите, что сепарабельный многочлен $f(x) \in \Bbbk[x]$ является неприводимым если и только если его группа Галуа $\mathsf{Gal}(\Bbbk_f/\Bbbk)$ действует транзитивно на его корнях.

Задача 9.2. Пусть $\mathbb{L} := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\mathbb{F} := \mathbb{L}(\sqrt{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{3}+3)})$. Докажите, что

(а) $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа и вычислите его группу Галуа.

(б) $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа и группа Галуа $\mathsf{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{Q})$ изоморфна группе кватернионов.

Задача 9.3. Докажите, что порядок группы $\Bbbk$-линейных автоморфизмов конечного расширения $\mathbb{F}/\Bbbk$ делит степень расширения $[\mathbb{F} : \Bbbk]$.

Задача 9.4. Вычислите группу Галуа расширений

(а) $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{17})/\mathbb{Q}$, **(б)** $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{15})/\mathbb{Q}$.

Задача 9.5. Покажите, что для поля $\Bbbk$ характеристики p, расширение построенное путем присоединения корня многочлена $x^p - x - a$ является расширением Галуа с циклической группой Галуа.

Указание: Вспомните, что многочлен $x^p - x - a$ или имеет корень или неприводим и опишите множество его корней.