

Семинар 1. Нетеровы кольца и модули

Задача 1.1. Пусть R – нетерово кольцо. Докажите, что кольцо формальных степенных рядов $R[[x]]$ также нетерово.

Задача 1.2. Докажите индукцией по числу порождающих, что конечно-порожденный модуль над нетеровым кольцом является нетеровым.

Задача 1.3*. Пусть M – нетеров R -модуль и пусть $\mathfrak{a} \subset R$ – аннигиляционный идеал, состоящий из элементов, действующих нулем в M . Докажите, что R/\mathfrak{a} является нетеровым кольцом.

Задача 1.4. Опишите какую-нибудь систему образующих идеала в кольце многочленов от 3 переменных $\mathbb{C}[x, y, z]$, состоящем из функций, обращающихся в нуль

- (а) на всех координатных плоскостях;
- (б) на всех координатных прямых;
- (в) во всех точках вида (t^2, t^3, t^4) , где $t \in \mathbb{C}$;
- (г) во всех точках вида (t^2, t^3, t^4) , где $t \in \mathbb{Z}$.

Задача 1.5. Найдите (задайте образующими и соотношениями) кольцо полиномов от 2 переменных, инвариантных относительно действия (а) группы диэдра D_n ; (б) группы вращений правильного n -угольника $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 1.6. Найдите какие-нибудь образующие идеала \mathfrak{a} в кольце симметрических функций $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]^{\mathbb{S}_3}$, состоящем из функций, обращающихся в ноль при

- (а) $x_1 = x_2$,
- (б) $x_1 = x_2 = x_3$.

Семинар 1. Нетеровы кольца и модули

Задача 1.1. Пусть R – нетерово кольцо. Докажите, что кольцо формальных степенных рядов $R[[x]]$ также нетерово.

Задача 1.2. Докажите индукцией по числу порождающих, что конечно-порожденный модуль над нетеровым кольцом является нетеровым.

Задача 1.3*. Пусть M – нетеров R -модуль и пусть $\mathfrak{a} \subset R$ – аннигиляционный идеал, состоящий из элементов, действующих нулем в M . Докажите, что R/\mathfrak{a} является нетеровым кольцом.

Задача 1.4. Опишите какую-нибудь систему образующих идеала в кольце многочленов от 3 переменных $\mathbb{C}[x, y, z]$, состоящем из функций, обращающихся в нуль

- (а) на всех координатных плоскостях;
- (б) на всех координатных прямых;
- (в) во всех точках вида (t^2, t^3, t^4) , где $t \in \mathbb{C}$;
- (г) во всех точках вида (t^2, t^3, t^4) , где $t \in \mathbb{Z}$.

Задача 1.5. Найдите (задайте образующими и соотношениями) кольцо полиномов от 2 переменных, инвариантных относительно действия (а) группы диэдра D_n ; (б) группы вращений правильного n -угольника $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 1.6. Найдите какие-нибудь образующие идеала \mathfrak{a} в кольце симметрических функций $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]^{\mathbb{S}_3}$, состоящем из функций, обращающихся в ноль при

- (а) $x_1 = x_2$,
- (б) $x_1 = x_2 = x_3$.