Семинар 2. Факториальные кольца, Теорема Гильберта о нулях

Задача 2.1. Докажите, что если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, то **(а)** $p \mid a_0$; **(б)** $q \mid a_n$; **(в)** $p - mq \mid f(m)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Задача 2.2. Докажите, что определитель матрицы порядка n является неприводимым многочленом от матричных элементов (то есть $\det(x_{ij})$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x_{ij}]$).

Задача 2.3. Воспользуйтесь критерием Эйзенштейна и покажите, что плоская кривая, заданная уравнением **(а)** $y^2 = x^3 + px + q$ $(p \neq 0)$; **(б)** $xy^3 + x^2 - xy + y - 1 = 0$ не является объединением двух разных алгебраических кривых. То есть покажите, что соответствующий многочлен неприводим в $\mathbb{C}[x, y]$.

Задача 2.4. Многочлен $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ называется однородным, если он является суммой мономов фиксированной степени. Идеал $\mathfrak{a}$ называется однородным, если он порожден некоторым набором однородных элементов.

(а) Доказать, что идеал $\mathfrak{a}$ однороден тогда и только тогда, когда вместе с любым его элементом он содержит и все его однородные составляющие (суммы мономов фиксированной степени).

(б) Докажите, что неприводимые множители однородного многочлена однородны, (можно начать со случая $n = 2$.)

Задача 2.5. Пусть $\mathfrak{a}$ – неединичный идеал в $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Докажите, что множество нулей идеала $\mathfrak{a}$ является начало координат тогда и только тогда, когда все однородные многочлены достаточно высокой степени принадлежат $\mathfrak{a}$.

Задача 2.6. Какие из следующих колец являются факториальными?

(а) $\mathbb{Z}[x]$, **(б)** $\mathbb{Q}[x, y]/(x^3 - 2)$, **(в)** $\mathbb{Z}[1/N]$, **(г)** p-адические целые числа $\mathbb{Z}_p$, **(д)** $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, **(е)** $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, **(ж)** $\mathbb{Z}[[x]]$.