Семинар 3. Неприводимость и простые идеалы.

Задача 3.1. Покажите, что для любого ненулевого многочлена $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ найдется такой набор чисел $a_1, \ldots, a_n \in \Bbbk$, что $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, при условии, что поле $\Bbbk$ бесконечно. Верен ли аналогичный факт для конечного поля $\Bbbk$.

Задача 3.2. Существует ли однородный неприводимый многочлен второй степени в
(а) $\mathbb{C}[x, y]$, **(б)** $\mathbb{C}[x, y, z]$.

Задача 3.3. Докажите, что многочлены **(а)** $x^{105} - 9$, **(б)** $(x - a_1) \ldots (x - a_n) - 1$ неприводимы над $\mathbb{Q}$, если числа $a_1, \ldots, a_n$ различны.

Задача 3.4. Опишите неприводимые компоненты алгебраических многообразий, являющихся множеством совместных нулей идеала $\mathfrak{a}$:
(а) $\mathfrak{a} := (xy, y^3 + y^2) \subset \mathbb{C}[x, y]$;
(б) $\mathfrak{a} := (xy + yz, x^3y^3 + x^2y^2) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$.
Опишите радикал идеала $\mathfrak{a}$.

Задача 3.5. Пусть $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ – набор идеалов в коммутативном кольце R и известно, что $\mathfrak{a}_i$ – простой для $i \geqslant 2$. Докажите, что если идеал I содержится в объединении $\cup_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, то $\exists k$, такое что $I \subset \mathfrak{a}_k$.

Указание: Воспользуйтесь индукцией по n, выбрав элемент $a_1 \ldots a_{n-1} + a_n$, для которого $a_j \in I \setminus \cup_{i \neq j} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$.

Данное утверждение называется *теоремой об избегании простых идеалов.*