НМУ, I курс, 11.09.2020

Листок 1.

Задача 1. Пусть $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Докажите, что множество 2^X, состоящее из всех подмножеств множества X, с операцией Δ является абелевой группой.

Задача 2. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, график которых
(a) симметричен относительно двух вертикальных прямых;
(b) симметричен относительно вертикальной прямой и точки;
(c) симметричен относительно двух точек.

Задача 3. Задана бесконечная последовательность функций $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$, определенных на числовой прямой. Докажите, что существует конечный набор функций $f_1, \ldots f_N$, композициями которых можно записать любую из функций g_k.

Задача 4. Докажите, что у функции на числовой прямой множество точек строгого локального минимума не более чем счетно.

Задача 5. Пусть E – счетное множество на плоскости. Докажите, что (a) существует такой вектор v, что $E+v$ не пересекается с E, (b) существует угол φ и точка O, что $R_O^{\varphi}E$ не пересекается с E. (c) существует прямая l такая, что S_lE не пересекается с множеством E.

Задача 6. Счетное упорядоченное множество называется плотным, если для всяких двух элементов есть элемент, лежащий между ними. Докажите, что между любыми двумя плотными счетными множествами без наименьших и наибольших элементов существует монотонная биекция.

Задача 7. Докажите, что
(a) существует биекция $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вида $f(x,y) = h(\varphi(x)+\psi(y))$;
(b)* существует биекция $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вида $f(x,y) = \varphi(x)+\psi(y)$.

Задача 8. Существует ли линейно упорядоченный по включению континуальный набор подмножеств множества натуральных чисел?

Задача 9. Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве из пяти элементов?

Если на множестве A задано отношение эквивалентности $\sim$, то подмножества вида $\{b\colon b\sim a\}$ называются *классами эквивалентности*, а множество, состоящее из всех таких классов, называется фактор множеством $A/\sim$.

Задача 10. В следующих примерах опишите фактор множество $A/\sim$ и дайте его геометрическую интерпретацию:
(a) $A=\mathbb{Q}$ и $a\sim b$ тогда и только тогда, когда найдется $c\neq 0$ такое, что $a=bc$;
(b) $A=\{-1,1\}\times[0,1]$, и $(x,t)\sim(y,s)$ тогда и только тогда, когда $t=s=1$ или $t=s=0$ или $x=y, t=s$.
(c) $A=\{-1,1\}\times[0,1]\times\{-1,1\}$, и $(x,t,z)\sim(y,s,v)$ тогда и только тогда, когда $t=s=1, z=v$ или $t=s=0, x=y$ или $x=y, t=s, z=v$;
(d) $A=[0,1]\times[0,1]$ и $(x,t)\sim(y,s)$ тогда и только тогда, когда $x=y$ и $t,s\in\{0,1\}$ или $x,y\in\{0,1\}$ и $t=s$;
(e) $A=[0,1]\times[0,1]$ и $(x,t)\sim(y,s)$ тогда и только тогда, когда $x=1-y$ и $t=0, s=1$ или $x=y, t=s$.