НМУ, I курс, 25.09.2020

Листок 2.

Вещественные числа

Аксиома полноты: *любые два непустых множества, одно из которых лежит левее другого на числовой оси, можно разделить точкой.*

Задача 1. Докажите, что на множестве бесконечных десятичных дробей выполняется аксиома полноты.

Задача 2. Докажите существование и иррациональность числа $\sqrt{5}$.

Задача 3. Заяц прыгает по окружности против часовой стрелки прыжками одинаковой длины, причем никогда не попадает в свой след. Окружность пересекает узкий ручеек. Докажите, что рано или поздно заяц наступит лапой в ручей.

Точка a называется **предельной точкой** *множества E, если во всяком интервале, содержащем точку a, бесконечно много точек множества E.* Если точка a принадлежит E и не является предельной точкой множества E, то a называется **изолированной точкой**.

Задача 4. Найдите все предельные точки множества E, где

(a) $E = \{\operatorname{tg} n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, (b) $E = \{\sin n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $E = \{\,\{\sqrt{2}n\}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, (d) $E = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}\colon\ m, n \in \mathbb{N}\}$.

Через $\{x\}$ обозначаем дробную часть x.

Задача 5. Из некоторого множества удалили все его изолированные точки, затем из того множества, которое получилось, опять удалили все изолированные точки и так далее. Возможно ли такую процедуру проделать бесконечное число раз, причем так, что каждый раз найдется, что удалить?

Задача 6. Докажите, что множество точек отрезка $[0, 1]$, в записи которых не встречается комбинация цифр 2021, является нигде не плотным множеством, то есть в каждом интервале есть интервал, в котором нет точек этого множества.

Комплексные числа

Задача 7.

(a) Объясните чем плохи «числа» вида $a + be$, сложение и умножение которых определяется также как и в комплексных числах, с единственным отличием $e^2 = 1$?

(b) Докажите, что на $\mathbb{C}$ нельзя определить линейный порядок, согласованный с операциями сложения и умножения.

(c) Вычислите сумму $q \sin x + q^2 \sin 2x + \ldots + q^n \sin nx$.

Задача 8.

(a) Какое движение плоскости задает отображение $z \to Az + B$, где $A, B \in \mathbb{C}$ и $|A| = 1$?

(b) Задайте с помощью отображения $z \to Az + B$ поворот на угол $\pi/6$ с центром в точке $(1, 1)$.

(c) Докажите, что отображение $z \to 1/\overline{z}$ (инверсия) переводит множество всех окружностей и прямых на плоскости в себя.

Задача 9. Изобразите на плоскости множества:

$$(a)\, |z - a| \leq 1, \quad (b) \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1, \quad (c)\, |z| = \sin(3\varphi), \quad d)\, |z| = e^{-\varphi},$$

где $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Задача 10. Четыре букашки, сидевшие в вершинах квадрата, стали двигаться друг за другом с единичной скоростью, держа курс на преследуемого. Нарисуйте траектории их движения. Какова длина каждой траектории?