НМУ, I курс, 09.10.2020

Листок 3.

Задача 1. Пусть последовательность неотрицательных чисел a_n такова, что

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n$.

Задача 2. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} = a \cdot b.$$

Задача 3.

(a) Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Этот предел обозначается через e.

(b) Докажите, что

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{nn!}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Выведите из этого иррациональность числа e.

Задача 4.(Теорема Штольца)

(a) Пусть y_n – строго возрастающая последовательность положительных чисел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Докажите, что из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n) = A$ следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = A$.

(b) Пусть y_n – строго убывающая последовательность, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Докажите, что из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n) = A$ следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = A$.

(c) Найдите асимптотику последовательности $x_n = \sum_{k=1}^n k^m$.

(d) Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

Положим

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \quad z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Задача 5. Докажите, что

(a) y_n не убывает, а z_n не возрастает; (b) $z_n - y_n \leq 1/n$;

(c) существует число $C > 0$ такое, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$, где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

(d) докажите (действуя по аналогии с пунктами (a)–(c)), что найдется число C такое, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n+1} + C + \varepsilon_n,$$

где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Задача 6. Колоду игральных карт (длина каждой равна 10 см) кладут на край стола и сдвигают относительно друг друга так, чтобы образовался выступ возможно большей длины. Края карт должны быть параллельны краю стола. Найдите длину наибольшего выступа, если в колоде n карт.

Задача 7. Пусть $a > 1$ и $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$(a) \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,\ (b) \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{1/k}} = 0,\ (c) \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ (d) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Задача 8. Пусть задан не более чем счетный набор ограниченных последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}, \ldots$. Докажите, что существует такая возрастающая последовательность номеров $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, что каждая из подпоследовательностей $\{a_{n_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$, $\{c_{n_k}\}, \ldots$ сходится.

Задача 9. Найдите все подмножества числовой прямой, которые могут являться множествами частичных пределов такой последовательности a_n, что $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Задача 10. Выясните сходятся ли следующие последовательности: $a_n = \sin n$, $a_n = \sin n^2$, $a_n = \sin 2^n$.