НМУ, I курс, 06.11.2020

Листок 5.

Задача 1. Бесконечное множество A на числовой прямой таково, что для всяких $x, y \in A$, $x < y$, существует $z \in A$, $x < z < y$. Обязано ли замыкание множества A содержать внутреннюю точку?

Задача 2. Докажите, что более чем счетное замкнутое множество на числовой прямой является континуальным.

Задача 3.

(a) Докажите, что прямую нельзя представить в виде объединения двух непустых и непересекающихся открытых множеств или двух непустых и непересекающихся замкнутых множеств.

(b) Опишите все подмножества прямой, каждое из которых являются одновременно открытым и замкнутым множеством.

Задача 4. Докажите, что числовую прямую нельзя представить в виде объединения счетного набора попарно непересекающихся отрезков.

Задача 5. Докажите, что множество непрерывных функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ континуально.

Задача 6.

(a) Докажите, что функция f, отображающая метрическое пространство X в метрическое пространство Y непрерывна тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ является открытым множеством для всякого открытого множества U.

(b) Пусть f – непрерывная функция из метрического пространства X в метрическое пространство Y и K – компакт в X. Докажите, что множество $f(K)$ компактно.

(c) Докажите, что непрерывная биекция метрического компакта в компакт является гомеоморфизмом.

(d) Гомеоморфны ли множества $[0, 1]$ и $[0, 1]^2$?

Задача 7. Пусть (X, ϱ) – метрическое пространство.

(a) Пусть $A \subset X$. Докажите, что $f(x) = dist(x, A) = \inf\{\varrho(x, y)\colon\ y \in A\}$ является непрерывной функцией.

(b) Докажите, что множество нулей непрерывной функции $X \to \mathbb{R}$ является замкнутым множеством и всякое замкнутое множество является множеством нулей некоторой непрерывной функции.

(c) Докажите, что для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств существует непрерывная функция, которая равна нулю на одном из них и единице на другом.

Задача 8. (a) Опишите все непрерывные числовые функции на прямой, удовлетворяющие тождеству $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(b) Существует ли разрывная функция, для которой выполняется тождество из (a)?

(c) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность монотонностью?

(d) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность ограниченностью f в некоторой окрестности нуля?

Задача 9.

(a) Докажите, что множество точек разрыва функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является не более чем счетным объединением замкнутых множеств.

(b) Докажите, что для всякого замкнутого множества F существует функция, у которой множество точек разрыва F.

(c)* Докажите, что не более чем счетное объединение замкнутых множеств является множеством точек разрыва некоторой функции.

(d) Существует ли функция на $\mathbb{R}$, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

Задача 10. Пусть C – множество Кантора и g – функция Кантора. Докажите, что
(a) $g(x+y) \leq g(x)+g(y)$,
(b) $\sup_{|x-y|\leq\delta} |g(x)-g(y)| = g(\delta)$,
(c) $|g(x)-g(y)| \leq |x-y|^{\alpha}$, где $\alpha = \log_3 2$.

Задача 11. Опишите все множества E на числовой прямой такие, что всякая непрерывная функция на E является равномерно непрерывной на E.

Задача 12. Существует ли на $[0,1]$ непрерывная функция f такая, что для всякого y множество $\{x\colon f(x)=y\}$ является континуальным?