НМУ, I курс, 20.11.2020

Листок 6.

Пусть функция f определена в окрестности точки a. Говорят, что f дифференцируема в точке a, если существует конечный предел $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, который называют производной функции f и обозначают через $f'(a)$. Если предел берется только по $x>a$, то его значение называют правой производной, а если предел берется только по $x<a$, то его значение называют левой производной.

Задача 1. Пусть неотрицательная функция f непрерывна, но не дифференцируема в x_0, а функция $f^{1+\alpha}$ дифференцируема в x_0 при любом $\alpha>0$. Докажите, что $f(x_0)=0$. Верно ли, что у f существуют правая и левая производные в точке x_0?

Задача 2. Пусть f – функция $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Докажите, что множество точек, в которых правая и левая производные f существуют и различны, не более чем счетно.

Задача 3. Докажите, что функция Кантора не имеет производной в точках канторовского множества.

Задача 4. (a) Пусть f всюду дифференцируемая функция и $F=\{x\colon f(x)=0\}$. Докажите, что множество $x\in F$, для которых $f'(x)\neq 0$, не более чем счетно.

(b)* Пусть f – непрерывна на $[a,b]$ и $f'(x)=0$ для всех x кроме не более чем счетного множества. Докажите, что $f=const$.

Задача 5. Пусть $f\in C^1(\mathbb{R})$, тогда найдется такое число $\theta\in(0,1)$, что справедливо равенство $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$. Найдите все функции f, для которых θ не зависит от точки x.

Задача 6. Что больше: e^π или π^e ?

Задача 7. Докажите, что функция $f(x)=e^{-1/x^2}$ при $x>0$ и $f(x)=0$ при $x\leq 0$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

Задача 8. Пусть $f\in C^\infty(-1,1)$, f отлична от нуля в любой проколотой окрестности $x=0$ и $f^{(k)}(0)=0$ для всякого $k\geq 0$. Докажите, что $\sup_{k,x}|f^{(k)}(x)|=+\infty$.

Задача 9. Докажите, что для всякого замкнутого множества F на числовой прямой существует бесконечно дифференцируемая функция f такая, что $F=\{x\colon\ f(x)=0\}$.

Задача 10. Пусть f – непрерывно дифференцируемая функция на $[0,+\infty)$ и $f(0)=1$. Вычислите предел $\lim_{n\to\infty}(f(\frac{t}{n}))^n$ для всякого $t\geq 0$.

Задача 11.

(a) Пусть $x=x(t)$ — корень уравнения $x^5+x=t$. Найдите первые три члена разложения функции $x(t)$ в точке $t=0$.

(b) Найдите первые три члена асимптотики n-ого корня уравнения $tg(x)=x$.

(c) Найдите первые два члена асимптотики последовательности $a_{n+1}=\sin a_n$, $a_1=1$.

Задача 12. Для произвольной последовательности $\{a_k\}$ докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такая что $f^{(k)}(0)=a_k$.