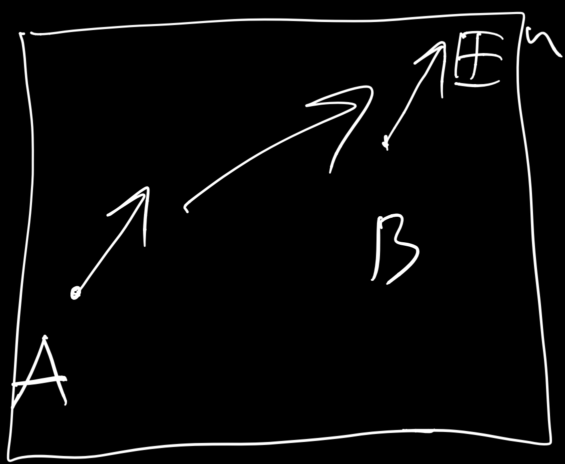
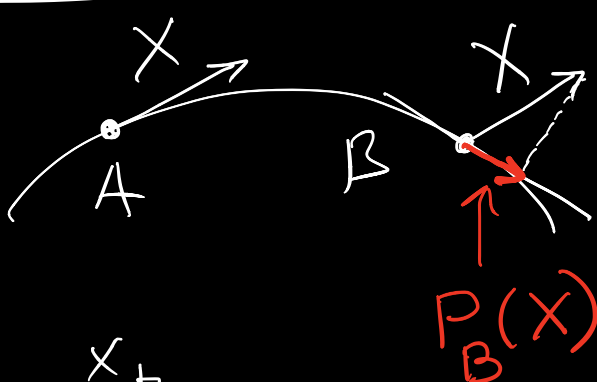
Анализ на многообразиях.

Лекция 10.

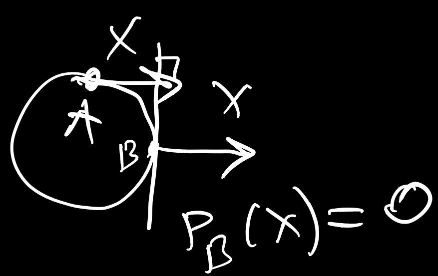


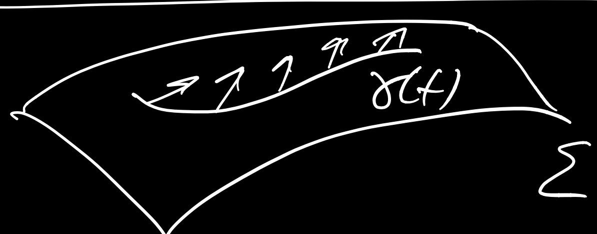
X – не касательный в точке B

Наивная идея

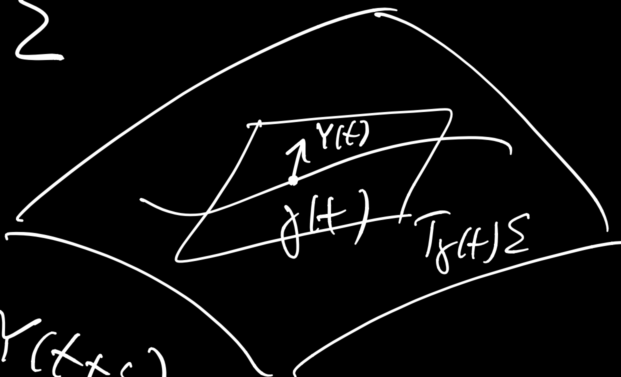


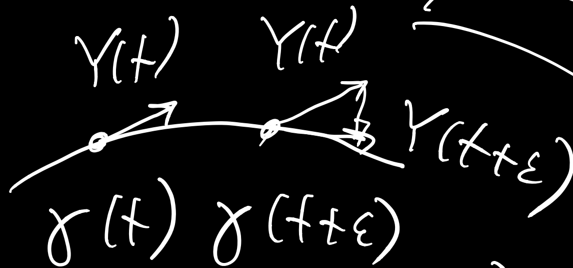
$\Sigma^k \subset \mathbb{R}^n$





$$Y(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$$





<u>Опр</u> Поле $Y(t)$ параллельно вдоль кривой $\gamma(t)$, если

$$P_{\gamma(t+\varepsilon)}Y(t) = Y(t+\varepsilon) + o(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0$

Пусть $Y(t) \parallel$ ~~вдоль~~ $\gamma(t)$

$$P_{\gamma(t+\varepsilon)}Y(t+\varepsilon) - P_{\gamma(t+\varepsilon)}Y(t) = o(\varepsilon)$$

$$P_{\gamma(t+\varepsilon)}\big(\underbrace{Y(t+\varepsilon) - Y(t)}_{\varepsilon\frac{dY}{dt}(t) + o(\varepsilon)}\big) = o(\varepsilon)$$

$$P_{\gamma(t+\varepsilon)} = P_{\gamma(t)} + \varepsilon Q + o(\varepsilon)$$

$$\varepsilon P_{\gamma(t)}\left(\frac{dY}{dt}\right) = O(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

$$P_{\gamma(t)}\left(\frac{dY}{dt}\right) = o(1) \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

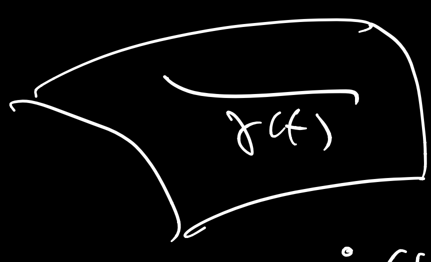
$\varepsilon \to 0$ $$\boxed{P_{\gamma(t)}\left(\frac{dY}{dt}\right) = 0}$$

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = \partial_{\dot\gamma} f$$

$$P_{\gamma(t)}\left(\partial_{\dot\gamma} Y\right) = 0$$

$$\boxed{\nabla_{\dot\gamma} Y = 0}$$

уравнение параллельного переноса



$u^1, \dots, u^k$ локальные к-ты

$$\gamma(t) = (u^1(t), \dots, u^k(t))$$

$$\dot\gamma(t) = (\dot u^1(t), \dots, \dot u^k(t))$$

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^l}{\partial u^i} + Y^j \Gamma^l_{ij}\right) \frac{\partial}{\partial u^l}$$

$X = \dot{\gamma} \qquad X^i = \dot{u}^i(t)$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0 \iff \dot{u}^i(t)\frac{\partial Y^l}{\partial u^i} + \dot{u}^i(t) Y^j \Gamma_{ij}^l = 0,$$

$$l = 1, \ldots, k$$

$$\frac{\partial Y^l}{\partial u^i}\dot{u}^i(t) = \frac{\partial Y^l}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt} = \frac{dY^l}{dt}$$

$$\boxed{\dot{Y}^l(t) + \Gamma_{ij}^l(u^1(t), \ldots, u^k(t))\,\dot{u}^i(t)\,Y^j(t) = 0, \quad l = 1, \ldots, k}$$

$$\boxed{\dot{Y}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i Y^j = 0}$$

Известны: $u^1(t), \ldots, u^k(t)$ — задана кривая γ

$\Gamma_{ij}^l(u^1(t), \ldots, u^k(t))$

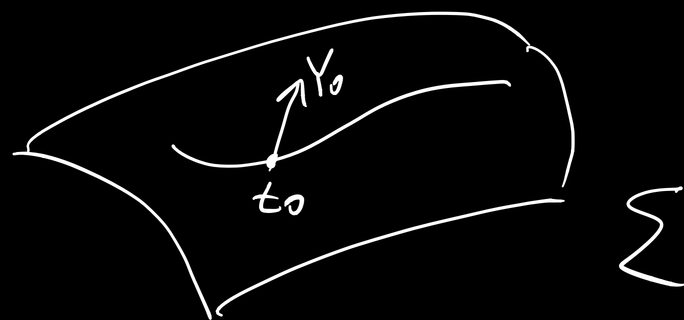
Неизвестные: $Y^1(t), \ldots, Y^k(t)$

Это система линейных ОДУ 1-го порядка на $Y^1(t), \ldots, Y^k(t)$

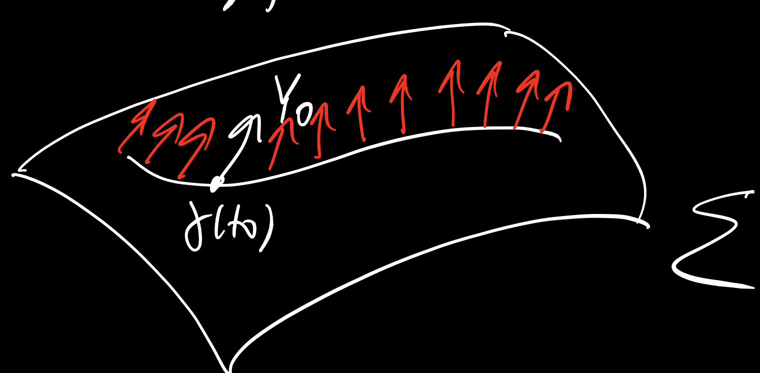
Задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{Y}^l + \Gamma^l_{ij} \dot{u}^i Y^j = 0, & l = 1..k \\ Y^l(t_0) = Y_0^l, & l = 1..k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0 \\ Y(t) = Y_0 \end{cases}$$

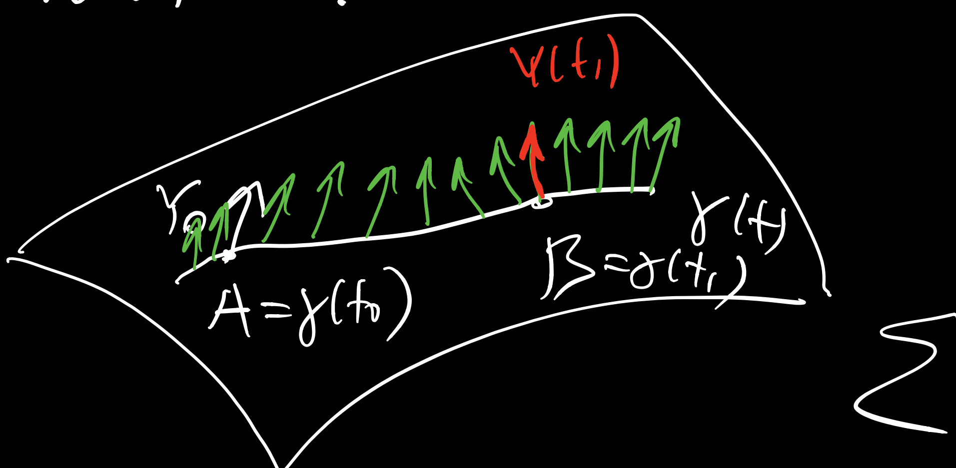


Теорема. Пусть Σ — поверхность, $\gamma(t)$ — кривая на Σ, $Y_0 \in T_{\gamma(t_0)}\Sigma$.
Тогда существует на всей γ и единственно параллельное вдоль γ векторное поле $Y(t)$, т.ч. $Y(t_0) = Y_0$.



Опр. Результат параллельного переноса касательного в точке A вектора Y_0

в точку B вдоль кривой $\gamma(t)$, такой, что $\gamma(t_0)=A$, $\gamma(t_1)=B$, – это вектор $Y(t_1)$ единственного параллельного вдоль $\gamma(t)$ векторного поля $Y(t)$, т.ч. $Y(t_0)=Y_0$.



$$Y(t_1) = \Pi_{A \xrightarrow{\gamma} B} Y_0$$

<u>Ут.</u> При параллельном переносе сохраняются длины и углы.

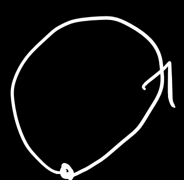
$\Rightarrow$ $Y(t), Z(t)$ $\parallel$ вдоль γ

$\langle Y(t), Z(t) \rangle$ функц от t

$$\frac{d}{dt}\langle Y(t), Z(t)\rangle = \partial_{\dot\gamma}\langle Y, Z\rangle =$$

$$= \langle \underbrace{\nabla_{\dot\gamma} Y}_{=0}, Z\rangle + \langle Y, \underbrace{\nabla_{\dot\gamma} Z}_{=0}\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle Y(t_1), Z(t_1)\rangle = \langle Y(t_0), Z(t_0)\rangle$$



$$\Pi_{A \xrightarrow{\gamma} A} : T_A\Sigma \to T_A\Sigma$$

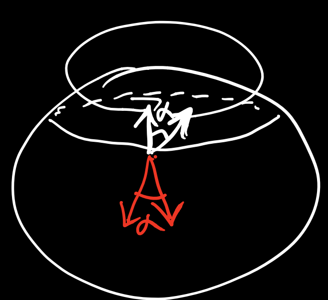
линейный оператор

$A = \gamma(t_0) = \gamma(t_1)$

он ортогональный

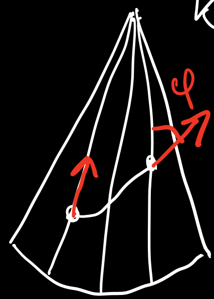
$\Sigma : \dim\Sigma = 2$ $\qquad \Pi_{A \xrightarrow{\gamma} A} \in SO(2)$

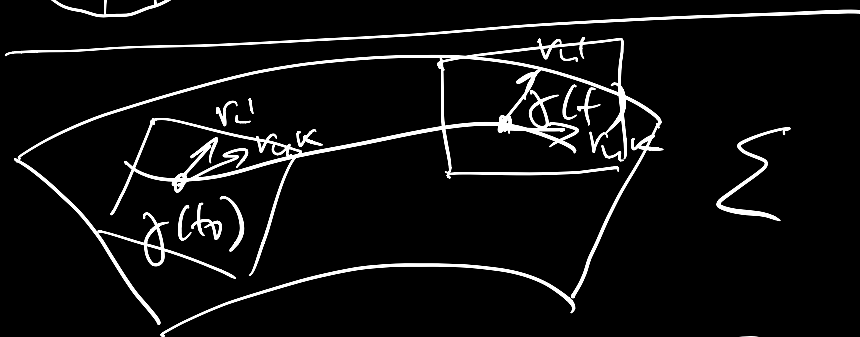
поворот на угол



$\Sigma \qquad \dim\Sigma = 2$

конус





$$\Pi(t) : T_{\gamma(t_0)}\Sigma \longrightarrow T_{\gamma(t)}\Sigma$$

оператор || переноса

матрица в базисах $r_{u^1}(\gamma(t_0)),\dots,r_{u^k}(\gamma(t_0))$,

$r_{u^1}(\gamma(t_1)),\dots,r_{u^k}(\gamma(t_1))$

$$Y(t)=\Pi(t)Y_0$$

$$Y^l(t)=\Pi^l_m(t)Y_0^m$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{Y}^l+\Gamma^l_{ij}\dot{u}^iY^j=0, & l=1,\dots,k \\ Y^l(t_0)=Y_0^l, & l=1,\dots,k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\Pi}^e_m Y_0^m + \Gamma^e_{ij} u^i \Pi^j_m Y_0^m = 0 \\ \Pi^e_m(t_0) Y_0^m = Y_0^e \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\Pi}^e_m(t) + \Gamma^e_{ij} u^i \Pi^j_m = 0 \\ \Pi^e_m(t_0) = \delta^e_m \end{cases}$$

задача Коши на матрицу оператора || переноса

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + a(t) y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = -ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a\,dt + C_1$$

$$\ln y = -\int a\,dt + C_1$$

$$y(t) = C e^{-\int a(t)\,dt}$$

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt}}$$

$$\Pi(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \Gamma(\dot\gamma)\,dt\right)$$

$$\Gamma^l_{ij}\dot u^i = \Gamma^l_j(\dot\gamma)$$

$$\|$$

$$du^i\,\Gamma^l_{ij}$$

в о/н базисе

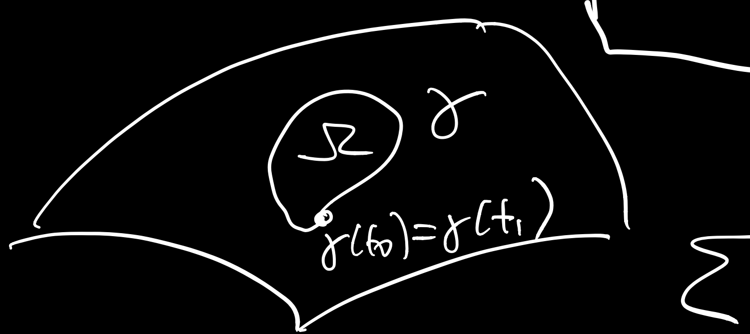
Матрицы из $SO(2)$ коммутируют (Π)

к/симм 2×2 тоже коммутируют (Γ)

Мораль: в о/н базисе касательных векторных полей на двумерной поверхности

$$\Pi(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \Gamma(\dot\gamma)\,dt\right) \quad \text{работает}$$

Было: в о/н базисе $\boxed{d\Gamma^1_2 = K\underbrace{e^1\wedge e^2}_{dS}}$



$$\Pi(t_1) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^1_2(\dot\gamma) \\ -\Gamma^1_2(\dot\gamma) & 0 \end{pmatrix} dt\right) =$$

$$= \exp\begin{pmatrix} 0 & -\int_{t_0}^{t_1} \Gamma^1_2(\dot\gamma)\,dt \\ +\int_{t_0}^{t_1} \Gamma^1_2(\dot\gamma)\,dt & 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \Gamma^1_2(\dot\gamma)\,dt$$

Ω γ

$$\Gamma^1_2 = P\,du + Q\,dv$$

$$\oint_\gamma P\,du + Q\,dv = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du \wedge dv$$

ф-ла Грина

$$d(P\,du + Q\,dv) =$$

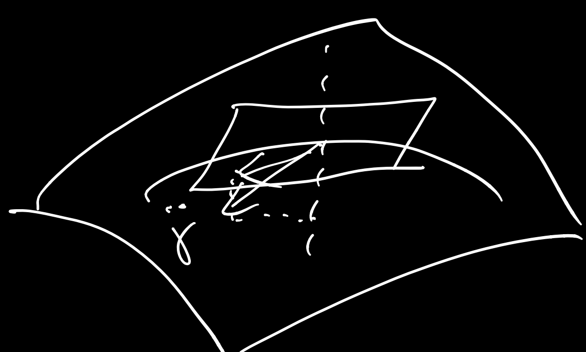
$$\int_{t_0}^{t_1} \Gamma^1_2(\dot\gamma)\,dt = \iint_\Omega d\Gamma^1_2 = \iint_\Omega K\,dS$$

$$\Rightarrow \Pi(t_1) = \exp\begin{pmatrix} 0 & \iint_\Omega K\,dS \\ -\iint_\Omega K\,dS & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha = \iint_\Omega K\,dS$$

<u>Теорема</u>. При параллельном переносе вдоль границы области Ω на двумерной поверхности вектор поворачивается на угол $\iint_\Omega K\,dS$



$$k_n = \left|(Id - P)(\ddot{\gamma})\right| = |B(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})|$$

нормальная кривизна

$\cdot = \frac{d}{ds}$, s - натуральный параметр

$$k_g = |P(\dot\gamma)| = |\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma|$$

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$$

Т.к. k_n зависит только от $\dot\gamma$, то среди всех кривых с одинаковым $\dot\gamma$ наименьшую кривизну имеет кривая с $k_g = 0$.

$$k_g = 0 \iff |\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma| = 0 \iff \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$

<u>Опр</u> $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ называется уравнением геодезических, а кривые, удовлетворяющие этому уравнению, называется геодезической.

<u>Утв</u> Если $k_g = 0$, то кривая — решение уравнения геодезических при натуральной параметризации.

$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \Rightarrow \dot\gamma$ параллельно вдоль $\gamma \Rightarrow |\dot\gamma| = \mathrm{const}$.

Опр Если s – натуральный параметр, то $t = as + b$, a, b константы, называется натуральный аффинный параметр.

Утв Пусть $\gamma(t)$ – решение уравнения геодезических $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$. Тогда t – натуральный аффинный параметр.

▶ $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = c > 0$

$t = \frac{s}{c} \Rightarrow \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c}\frac{d\gamma}{dt}$

$\Rightarrow \left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = \left|\frac{1}{c}\frac{d\gamma}{dt}\right| = \frac{c}{c} = 1$

$\Rightarrow s = tc$ натуральный

$t = \underset{\overset{\|}{as+0}}{\frac{1}{c}s}$ аффинный натуральный параметр. ◀

Утв Пусть $\gamma(t)$ – решение уравнения геодезических $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$. Тогда геодезическая кривизна этой кривой 0.

$$\Rightarrow k_g = \left| \nabla_{\frac{d\gamma}{ds}} \frac{d\gamma}{ds} \right| \ominus \qquad \boxed{t = as + b}$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = a \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\ominus \left| \nabla_{a \frac{d\gamma}{dt}} a \frac{d\gamma}{dt} \right| = a^2 \left| \underbrace{\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt}}_{0} \right| = 0$$

Вывод: геодезические (то есть решения уравнения геодезических $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$) — это в точности кривые с геодезической кривизной 0 в различных аффинных натуральных параметризациях

Звукох.

$$\nabla_{\dot\gamma} Y = 0 \qquad \dot Y^{l} + \Gamma^{l}_{ij}\, \dot u^{i} Y^{j} = 0$$

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0 \qquad Y = \dot\gamma \Rightarrow Y^{l} = \dot u^{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot Y^{l} = \ddot u^{l}$$

$$\ddot u^{l} + \Gamma^{l}_{ij}\, \dot u^{i} \dot u^{j} = 0, \quad l = 1, \dots, k$$

Уравнение геодезических в координатах

Это система нелинейных ОДУ 2-го порядка на неизвестные $u^1(t), \dots, u^k(t)$

$$\ddot u^{l}(t) + \underbrace{\Gamma^{l}_{ij}(u^1(t), \dots, u^k(t))}_{\text{нелинейная вещь}}\, \dot u^{i}(t)\, \dot u^{j}(t) = 0$$