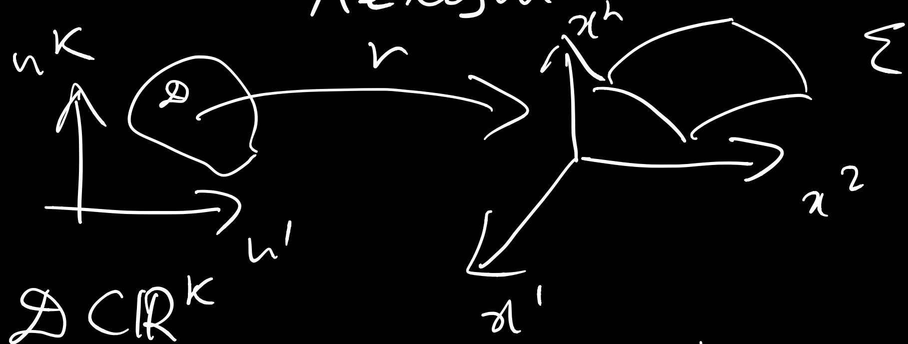
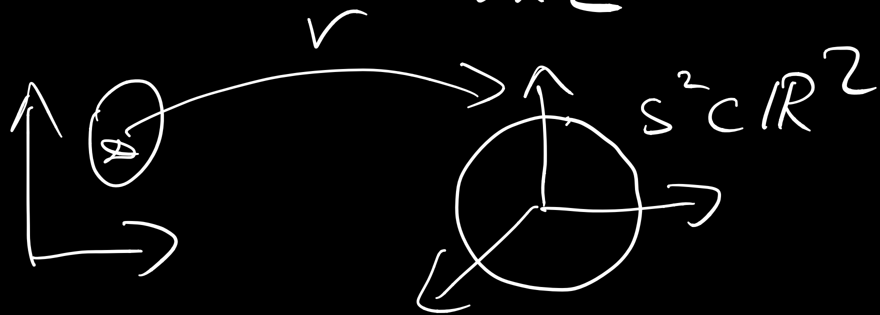
Анализ на многообразиях.

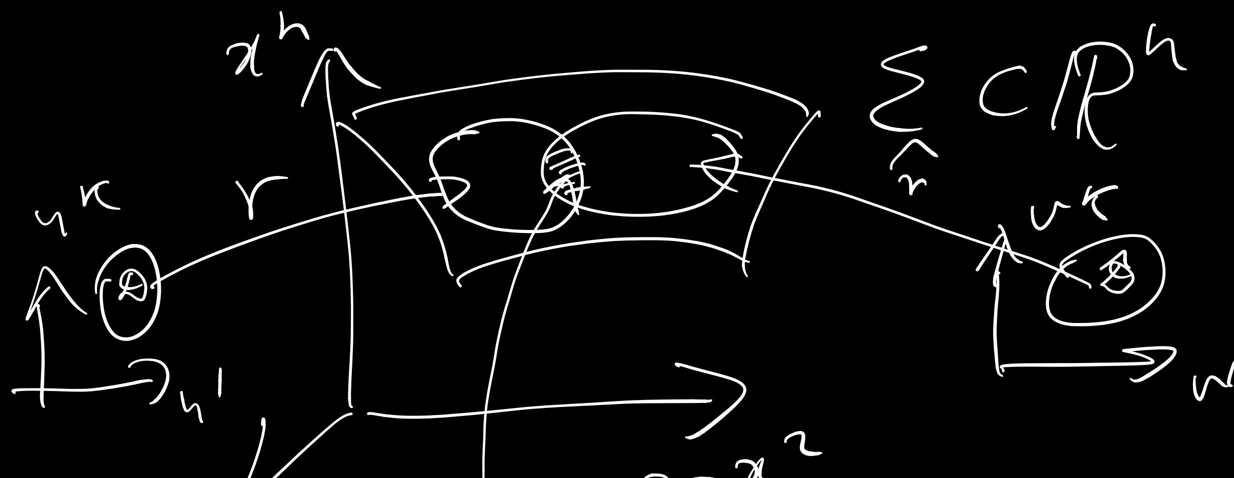
Лекция 12.



$x^1, .., x^n$ – глобальные к-ты в $\mathbb{R}^n$

$u^1, .., u^k$ – локальные к-ты на Σ





что происходит на пересечении?

условие регулярности

$$rk\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) = k$$

матрица Якоби отображения r

$\boxed{n \times k}$

для каждой точки в D можно в этой матрице найти невырожденный минор $k \times k$, и он невырожден в некоторой окрестности

перенумеровывая $x^1, \dots, x^n$, можно добиться, что, для простоты,

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right| \neq 0, \text{ где } i,j = 1, \dots, k$$

(верно в указанной окрестности)

Тогда по теореме об обратной ф-ции

$$\begin{cases} u^1 = u^1(x^1, \dots, x^k) \\ \vdots \\ u^k = u^k(x^1, \dots, x^k) \end{cases}$$

гладкие отображения

подставляя гладкие ф-ции

$$x^i = x^i(v^1, \dots, v^k),$$

получаем гладкое отображение $r^{-1} \circ \hat{r}$

$$u^1 = u^1(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$$
$$\vdots$$
$$u^k = u^k(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$$

гладкое, где определено.

$r^{-1} \circ \hat r$ определено на $\hat r^{-1}(r(D))$

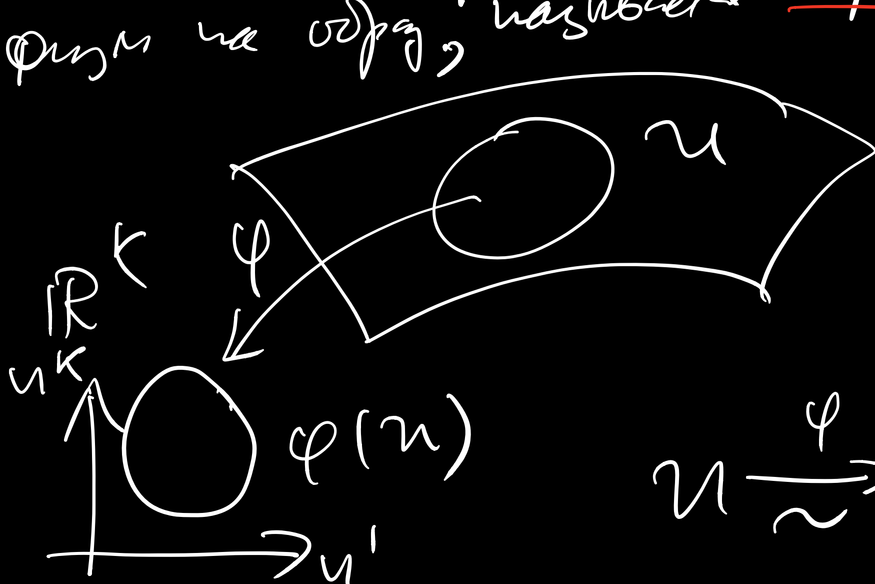
аналогично находится обратное $\hat r \circ r^{-1}$, оно тоже гладкое, то есть это диффеоморфизм областей в $\mathbb{R}^k$

Рассмотрим топологическое пространство M, такое, что

1) M хаусдорфово,
2) M удовлетворяет второй аксиоме счетности.

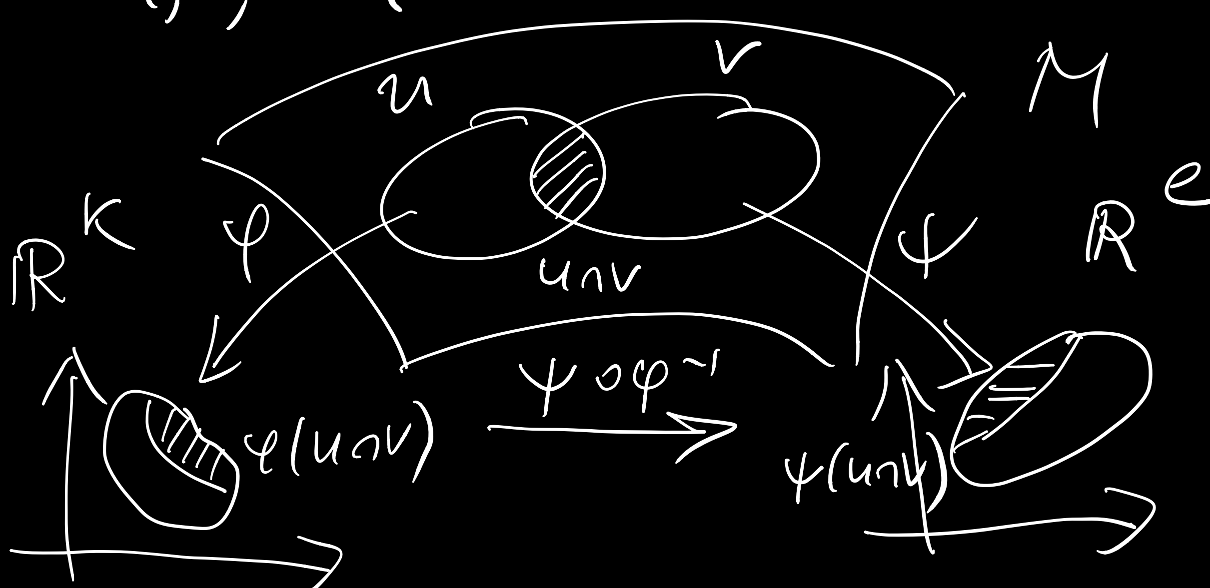
(2-я аксиома счётности = M обладает счётной базой топологии).

<u>Опр</u> Пара (U, φ), где $U \subset M$ — область, а $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ гомеоморфизм на образ, называется <u>картой на M.</u>



$$U \xrightarrow[\sim]{\varphi} \varphi(U) \subset \mathbb{R}^k$$

$u^1 \circ \varphi, \dots, u^k \circ \varphi$ локальные к-ты точки на U



$U \cap V \neq \emptyset$

$\varphi(U\cap V) \xrightarrow[\sim]{} \psi(U \cap V) \Rightarrow$

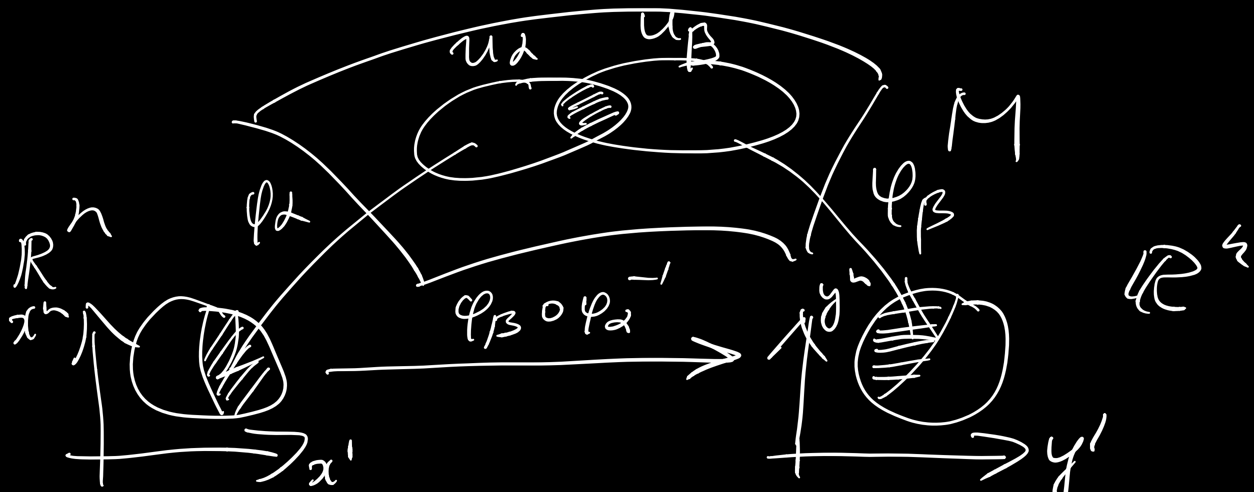
гомеоморфизм

$\Rightarrow k = l$ из топологической теории размерности.

поэтому для связного M все карты принимают значение в $\mathbb{R}^k$, это k называется размерностью M, $\dim M$.

Вопрос выбора определения, разрешить ли разным компонентам связности M иметь разную размерность.

<u>Опр</u> Набор карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M называется атласом (класса гладкости C^l), если эти карты согласованы в следующем смысле: отображения $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ являются гладкими класса C^l на области определения, а также $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.



$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$ отображения склейки

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n)$$
$$\vdots$$
$$y^n = y^n(x^1, \dots, x^n)$$

замена локальных координат

$$V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\bigsqcup_\alpha V_\alpha \big/ \sim \;\cong M$$ гомеоморфизм как топологических пространств

$$\begin{matrix} p \in V_\alpha \\ \wr \\ q \in V_\beta \end{matrix} \iff q = \varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(p)$$

Опр. Атласы $A_1=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ и $A_2=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ эквивалентны, если $A_1\cup A_2$ тоже атлас (класса гладкости C^ℓ)

Опр. Класс эквивалентности атласов на M называется гладкой (или дифференцируемой) структурой на M (класса гладкости C^ℓ).

Опр. Гладкое многообразие (класса гладкости C^ℓ) — это топологическое пространство M (хаусдорфово, со 2-й аксиомой счётности) с гладкой структурой класса C^ℓ.

Пример нехаусдорфова многообразия:

$M=\mathbb{R}\sqcup\mathbb{R}/\sim$ $\quad x\sim y$ если $x=y\neq 0$

прямая с двойной точкой.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} /_{\sim}$ открыто

$0+$

$U =$ ———$\bullet$———→ открыто в M

$V =$ ———$\bullet$———→ открыто в M

$0-$

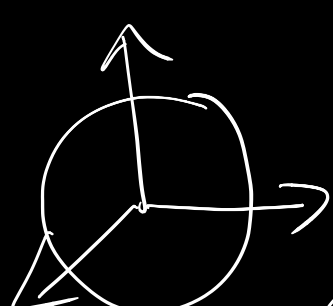
<u>Карты:</u> $U \xrightarrow[\sim]{\varphi = id} \mathbb{R}$ гомеоморфизм

$V \xrightarrow[\sim]{\psi = id} \mathbb{R}$

$\psi \circ \varphi^{-1}$ ——— ———→ $\mathbb{R} \xrightarrow[\text{гладкая}]{id} \mathbb{R}$

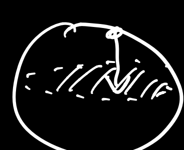
это атлас

<u>Пример</u> S^2



$U_{z,+} = \{(x,y,z) \mid z > 0\}$

$(x,y,z) \xrightarrow{\varphi_{z,+}} (x,y)$



$U_{z,-}$ $\{(x,y,z) \mid z<0\}$

$(x,y,z) \xrightarrow{\varphi_{z,-}} (x,y)$

$U_{x,+}, U_{x,-}, U_{y,+}, U_{y-}$

Атлас A_1

$U_{z,+}$ $\quad \varphi_{z,+}(x,y,z)=(x,y)$

$U_{x,-}$ $\quad \varphi_{x,-}(x,y,z)=(y,z)$

$$\varphi^{-1}_{x,-}(y,z)=\left(-\sqrt{1-y^2-z^2},\, y,\, z\right)$$

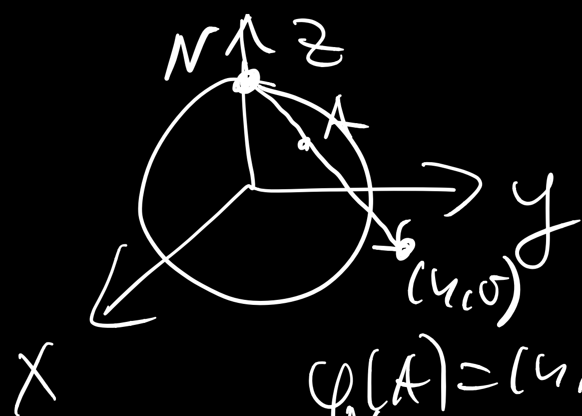
$$\varphi_{z,+}\circ\varphi^{-1}_{x,-}(y,z)=\left(-\sqrt{1-y^2-z^2},\, y\right)$$

гладкое замена и т.

Это атлас, но он неудобный.

Другой атлас

Стереографическая проекция



$\varphi_N(A) = (u,v)$

проекция из северного полюса на экваториальную плоскость.

$A(x_0,y_0,z_0)$, $N(0,0,1)$

прямая NA
$$x = 0 + t x_0$$
$$y = 0 + t y_0$$
$$z = 1 + t(z_0 - 1)$$

пересечение с экв. плоскостью $\Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{1-z_0} \Rightarrow$

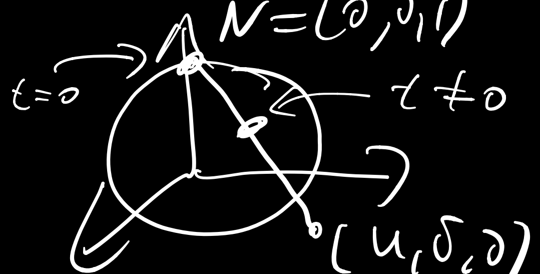
$$\varphi_N(x,y,z) = \Big(\underbrace{\frac{x}{1-z}}_{\substack{\parallel \\ u}}, \underbrace{\frac{y}{1-z}}_{\substack{\parallel \\ v}}\Big)$$

$$(u,v) = \varphi_N(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

$(S^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$ карта

Найдем обратное

$\varphi_N^{-1}(u,v)$ — ?



прямая
$$x = 0 + tu$$
$$y = 0 + tv$$
$$z = 1 + t(-1)$$

пересечение со сферой $x^2+y^2+z^2=1$

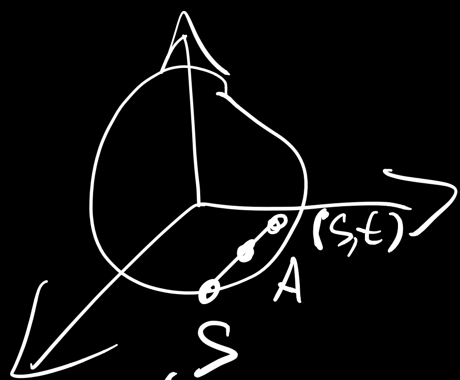
$$(tu)^2+(tv)^2+(1-t)^2=1$$
$$u^2t^2+v^2t^2+t^2-2t+\cancel{1}=\cancel{1}$$

поделим на t

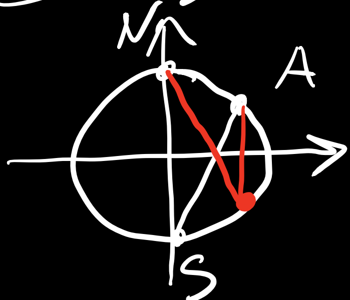
$$t(u^2+v^2+1)=2$$
$$t=\frac{2}{u^2+v^2+1}$$

$$x=\frac{2u}{u^2+v^2+1}$$
$$y=\frac{2v}{u^2+v^2+1}$$
$$z=1-t=1-\frac{2}{u^2+v^2+1}=\frac{u^2+v^2+1-2}{u^2+v^2+1}=$$
$$=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2-1}$$

$$\varphi_N^{-1}(u,v)=\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2-1}\right)$$



$$\varphi_S(A)=(s,t)$$



$$\varphi_S(x,y,z)=$$
$$=\varphi_N(x,y,-z)$$

поэтому $\varphi_S(x,y,z)=\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right)$

вторая карта

$$(S^2\setminus\{S\},\varphi_S)$$

замена координат?

$$\varphi_S\circ\varphi_N^{-1}(u,v)=$$
$$=\varphi_S\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2-1}\right)=$$

$$= \left(\frac{\frac{2u}{u^2+v^2+1}}{1+\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}}, \frac{\frac{2v}{u^2+v^2+1}}{1+\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}} \right) =$$

$$= \left(\frac{2u}{u^2+v^2\cancel{+1}+u^2+v^2\cancel{-1}}, \frac{2v}{u^2+v^2+1+u^2+v^2-1} \right) =$$

$$= \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2} \right) \quad (*)$$

пересечение карт $S^2 \setminus \{N, S\}$

$\varphi_N(S^2 \setminus \{N, S\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$

отображение склейки (*) гладкое на области определения

$$s = \frac{u}{u^2+v^2}$$

$$t = \frac{v}{u^2+v^2}$$

атлас $A_2 = \{(S^2 \setminus \{N\}, \varphi_N), (S^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)\}$

Эквивалентны ли атласы?

Проверим для $(U_{z,+}, \varphi_{z,+})$

и $(S^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$.

$$\varphi_N^{-1}(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

$$\varphi_{z,+} \circ \varphi_N^{-1}(u,v) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}\right)$$

гладкие

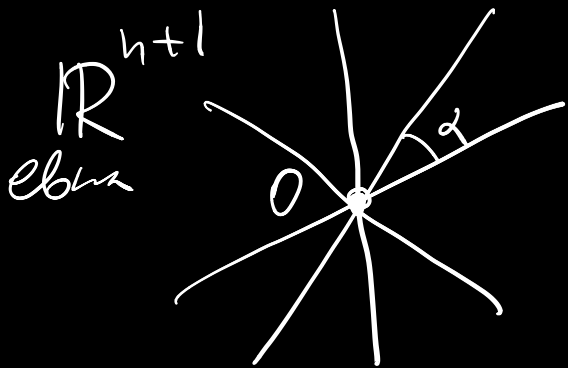
$$\varphi_{z,+}^{-1}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

$$\varphi_N \circ \varphi_{z,+}^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

эти замены гладкие

$A_1 \sim A_2$, это одна и та же структура на S^2

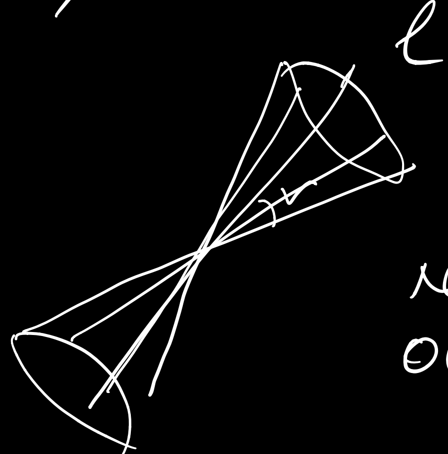
<u>Пример</u> $\mathbb{RP}^n$



фиксируем O

$\mathbb{RP}^n$ = мн-во прямых, проходящих через O

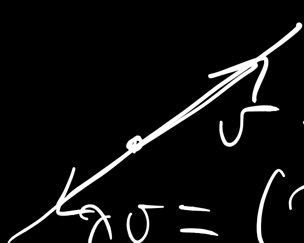
$(\mathbb{RP}^n, \alpha)$ — метрическое пр-во ⇒
⇒ Хаусдорфово топологическое



шар $B_r(l)$ =
= все прямые, лежащие внутри конуса с осью l и углом r

Однородные к-ты

в $\mathbb{R}^{n+1}$ выберем декартову прямоуг. систему к-т с началом в O.



$v = (x^0, \dots, x^n) \neq 0$

$\lambda v = (\lambda x^0, \dots, \lambda x^n) \neq 0, \quad \lambda \neq 0$

$$\mathbb{RP}^n \simeq \{(x^0,\dots,x^n)\neq 0\}/\sim$$

$$(x^0,\dots,x^n)\sim(\lambda x^0,\dots,\lambda x^n),\quad \lambda\neq 0$$

класс экв-ти $[x^0:\dots:x^n]$ —

— однородные к-ты

Однородные координаты не являются координатами, т.к. не однозначны

В качестве базы топологии достаточно взять $B_r([x^0:\dots:x^n])$,

где $r\in\mathbb{Q}_+$, $x^i\in\mathbb{Q}$

а это счётная база

Карты ?

аффинные карты:

$U_i = \{[x^0 : \ldots : x^n] \mid x^i \neq 0\}$ открыто

$[x^0 : x^1 : \ldots : x^{i-1} : x^i : x^{i+1} : \ldots : x^n] =$

$= [\frac{x^0}{x^i} : \frac{x^1}{x^i} : \ldots : \frac{x^{i-1}}{x^i} : 1 : \frac{x^{i+1}}{x^i} : \ldots : \frac{x^n}{x^i}]$

$(U_i, \varphi_i) \qquad \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$

$\varphi_i([x^0 : \ldots : x^n]) = (\underset{z_i^0}{\frac{x^0}{x^i}}, \ldots \widehat{\frac{x^i}{x^i}}, \ldots \underset{z_i^n}{\frac{x^n}{x^i}})$

z_i^i нет

$\varphi_i^{-1}(z_i^0, \ldots, \hat{z_i^i}, \ldots, z_i^n) =$

$= [z_i^0 : \ldots : \underset{i}{1} : \ldots z_i^n]$

согласованность карт

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z_i^0, \ldots, \hat{z_i^i}, \ldots, z_i^n) =$

$= \varphi_j([z_i^0 : \ldots : \underset{i}{1} : \ldots z_i^n]) =$

$$= \left(\frac{z_i^0}{z_i^j} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{1}{z_i^j} : \ldots : \frac{z_i^n}{z_i^j} \right)$$

$$\begin{array}{cccc} \| & j & i & \| \\ z_j^0 & & = & z_j^n \end{array}$$

замена:

$$z_j^k = \begin{cases} \dfrac{z_i^k}{z_i^j}, & k \neq i, j \\ \dfrac{1}{z_i^j}, & k = i \end{cases}$$

на $U_i \cap U_j$ это гладкие ф-ции

$\mathbb{RP}^1 \quad [x^0 : x^1]$

$U_0 \quad t = \frac{x^1}{x^0}$ замена $t = \frac{1}{s}$

$U_1 \quad s = \frac{x^0}{x^1}$

$\mathbb{RP}^2 \quad [x^0 : x^1 : x^2]$

$U_0 \quad t = \frac{x^1}{x^0}, \ s = \frac{x^2}{x^0}$

U_1 $u = \frac{x^0}{x^1}$, $v = \frac{x^2}{x^1}$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{u} \\ s = \frac{v}{u} \end{cases}$$

замена координат