Анализ на многообразиях.

Лекция 14.

① Коммутатор векторных полей

Xf – если X вектор, то это число, а если X – векторное поле, то это функция

$$XYf - YXf = ?$$

в локальных к-тах $x^1, \dots, x^n$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Тогда (прямое вычисление)

$$XYf - YXf = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

это производная f ~~вдоль~~ вектора с такими координатами

Мы назовем его коммутатором векторных полей X и Y

$$[X, Y] f = XYf - YXf$$

$\underline{\underline{\text{Т.е.}}}$ $[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$

Утв.

1) кососимметрично $[X,Y]=-[Y,X]$

2) $[X_1+X_2,Y]=[X_1,Y]+[X_2,Y]$

3) $[X,Y_1+Y_2]=[X,Y_1]+[X,Y_2]$

4) $[X,fY]=(Xf)Y+f[X,Y]$

5) $[fX,Y]=-(Yf)X+f[X,Y]$

6) $[\,,\,]$ – билинейная (над $\mathbb{R}$) кососимметрическая операция

7) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+$
$+[Z,[X,Y]]=0$ (тождество Якоби)

8) Векторные поля на M образуют алгебру Ли.

② M многообразие

$$TM=\bigsqcup_{A\in M} T_AM$$ множество

TM называется касательным расслоением

$$\begin{array}{c} TM \\ \downarrow p \\ M \end{array} \qquad p(\underset{T_AM}{\underset{\cap}{v}})=A$$ p – проекция

Утв. На TM можно ввести структуру гладкого многообразия, причем p будет гладким отображением.

▷ M $\dim = n$

$A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ атлас на M

U_α $\quad x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n$ локальные к-ты в U_α

$v \in T_A M$, $A \in U_\alpha \Rightarrow$

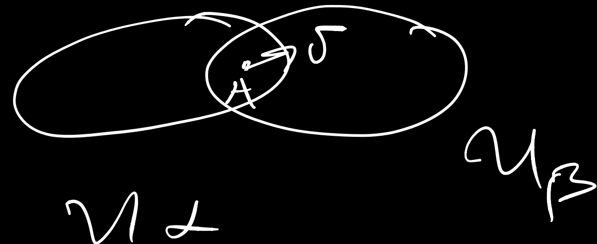
$$\Rightarrow v = v^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$$

$$TU_\alpha = \bigsqcup_{A \in U_\alpha} T_A M \underset{\text{биекция}}{\longleftrightarrow} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

$$T_A M \ni v \longleftrightarrow (\underset{U_\alpha}{\underset{\uparrow}{A}}, \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\uparrow}{(v^1, \dots, v^n)}})$$

Введем в TU_α топологию из $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, пользуясь этой биекцией.

Эта топология хаусдорфова и со второй аксиомой счётности.



$$v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1_\alpha} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}$$

$$\Big\| \quad \hat{v}^1 \frac{\partial}{\partial x^1_\beta} + \dots + \hat{v}^n \frac{\partial}{\partial x^n_\beta}$$

$$\boxed{\hat{v}^i = \frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha} v^j}$$

$$\left(\bigsqcup_\alpha TU_\alpha \right) \Big/ \sim$$

$$(A, (v^1, \dots, v^n)) \Longleftrightarrow v \in T_A M \subset TU_\alpha$$

$$\wr$$

$$(A, (\hat{v}^1, \dots, \hat{v}^n)) \Longleftrightarrow v \in T_A M \subset TU_\beta$$

если $\hat{v}^i = \dfrac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha} v^j$

$$\underbrace{\left(\bigsqcup_\alpha TU_\alpha\right)}_{\text{здесь есть топология}}\Big/_{\sim} \;\underset{\substack{\text{как}\\ \text{множество (биекция)}}}{=}\; TM$$

здесь есть топология $\Longrightarrow$ введём на TM топологию с помощью этой биекции.

Упр TM — топ. хаусдорфово пространство со 2-й аксиомой счётности

Карты $(TU_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha)$

$$\hat{\varphi}_\alpha(v) = (\underbrace{x^1_\alpha(A), \dots, x^n_\alpha(A)}_{\varphi_\alpha(A)}, v^1, \dots, v^n)$$

$v \in T_A U_\alpha$

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}$$

$$\hat{\varphi}_\alpha : TU_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$$

TU_α открыто, $\hat{\varphi}_\alpha$ — гомеоморфизм согласованы ли карты?

$$\hat{\varphi}_\beta \circ \hat{\varphi}_\alpha^{-1}(x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^n, v_\alpha^1,\dots,v_\alpha^n) =$$

$$= \underbrace{\Big(\underbrace{x_\beta^1(x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^n),\dots,x_\beta^n(x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^n)}_{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}},\ \underbrace{v_\beta^1(x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^n,v_\alpha^1,\dots,v_\alpha^n),\dots}_{\substack{v_\beta^i = \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} v_\alpha^j \\ \text{гладко по } x_\alpha^i \text{ и} \\ \text{линейно по } x_\alpha^i}}\Big)}_{\text{гладкое отображение}}$$

$\Rightarrow \{(TU_\alpha, \hat{\varphi}_\alpha)\}$ образуют согл. атлас на TM

гладко ли p?

$$p(x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^n, v_\alpha^1,\dots,v_\alpha^n) =$$

$$= (x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^n) \quad \text{гладкое}$$

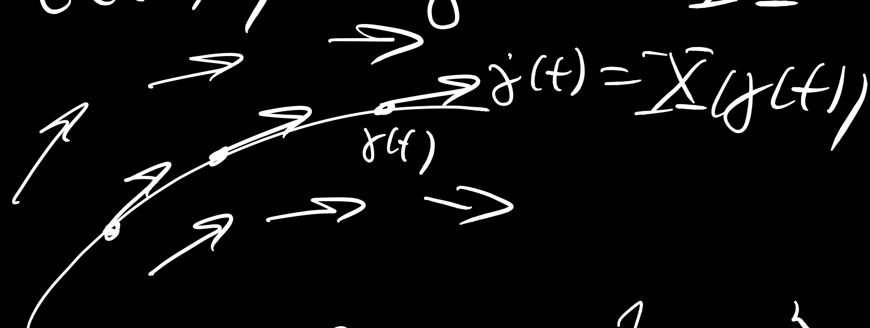
③ Векторные поля и автономные ОДУ

$M \supset U$

X — векторное поле на U

Опр Кривая $\gamma : (a,b) \to U$ называется интегральной кривой векторного поля X, если

$$\forall t \in (a,b) \quad \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$



В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

↑ функции от точки, т.е. от $x^1, \dots, x^n$.

$$\dot\gamma(t) = \bar X(\gamma(t))$$

$$\Updownarrow$$

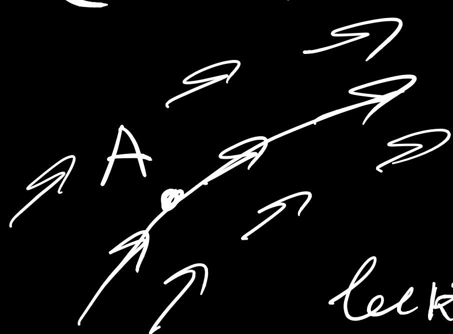
$$\begin{cases} \dot x^1(t) = \bar X^1(x^1(t),\dots,x^n(t)) \\ \vdots \\ \dot x^n(t) = \bar X^n(x^1(t),\dots,x^n(t)) \end{cases}$$

Система автономных ОДУ 1-го порядка.

Задача Коши

$$\begin{cases} \dot x^i = \bar X^i(x^1,\dots,x^n), \quad i=1..n \\ x^i(t_0) = A^i, \quad i=1..n \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$



задача нахождения интегральной кривой векторного поля $\bar X$, проходящей через A в момент t_0.

$\gamma(t, t_0, A)$ — такая кривая.

<u>Утв</u> (из теории ОДУ): 1) $\exists$ и единственна*)

решение $\gamma(t, t_0, A)$, определенное на некотором интервале (a,b) это

2) $\gamma(t, t_0, A)$ гладко зависит от A.

*) речь о непродолжаемых решениях.

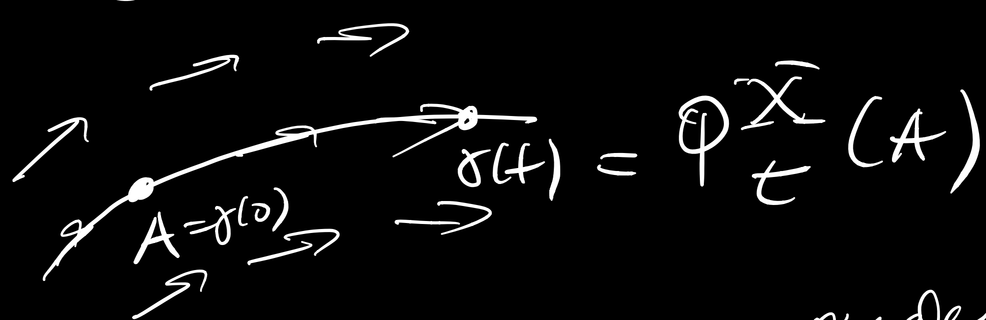
Определим отображение

$$\varphi_t^{\bar X} : M \to M$$

$\bar X$ – векторное поле на M

$t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_t^{\bar X}(A) = \gamma(t, 0, A)$$



$\varphi_t^{\bar X}$ гладкое на области определения

$\varphi_t^{X}(A) = \gamma(t, 0, A)$ определена, если $\gamma(s, 0, A)$ определено при $s \in (a,b)$ и $t \in (a,b)$.

Утв 1) $\varphi_0^{\bar X} = \mathrm{id}$

2) $\varphi_{-t}^{\bar X} = \left(\varphi_t^{\bar X}\right)^{-1}$

3) $\varphi_s^{\bar X} \circ \varphi_t^{\bar X} = \varphi_{s+t}^{\bar X}$

верно, если все отображения в данной точке определены.

▶ $\varphi_s^{\bar X}\left(\varphi_t^{\bar X}(A)\right) =$

$= \varphi_s^{\bar X}\left(\gamma(t,0,A)\right) = \gamma(s,0,\gamma(t,0,A))$

$\varphi_{s+t}^{\bar X}(A) = \gamma(s+t,0,A)$

при $s=0$

левая часть $\gamma(0,0,\gamma(t,0,A)) = \gamma(t,0,A)$

правая часть $\gamma(t,0,A)$

Какое ОДУ решает?

левая часть $\frac{d}{ds}\gamma(s,0,\gamma(t,0,A)) =$

$= \bar X(\gamma)$

правая часть $\frac{d}{ds}\gamma(s+t,0,A) = \bar X(\gamma)$

В силу единственности решения задачи Коши они равны.

1) + 3) $\Rightarrow$ 2)

Это локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов ИСМ, порождённая векторным полем X.

---

4) Дифференциальные 1-формы.

Линейная алгебра

V вект. пр-во

V^* двойственное пр-во

$V \ni v$ вектор

$V^* \ni \xi$ ковектор

$e_1, .., e_n$ базис

$e^1, .., e^n$ двойственный базис

$e^i(e_j) = \delta^i_j$

$v = v^i e_i$

$\xi = \xi_j e^j$

$(\xi, v) = \xi(v) = \xi_i v^i$

спаривание ковектора и вектора

Анализ на многообразиях

$T_A M$

касательное пр-во к M в точке A

$T^*_A M = (T_A M)^*$

кокасательное пр-во к M в точке A

$x^1, \ldots, x^n$ – лок. к-ты

$e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$

$e^1, \ldots, e^n$ двойств. базис

$\underline{X} = \underline{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$\xi = \xi_i e^i$

векторное поле $\underline{X} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{X}(A) \in T_A M$

ковекторное поле $\omega \Leftrightarrow \omega_A \in T^*_A M$

дифференциальные 1-формы $\equiv$ ковекторные поля.

$\omega(\underline{X})$ – функция

$$\big(\omega(\bar X)\big)(A) = \underset{\substack{\cap \\ T_A^*M}}{\omega_A}\big(\underset{\substack{\cap \\ T_AM}}{X(A)}\big) \in \mathbb{R}$$

$\bar X$ - гладкое в. поле, если $\forall f \in C^\infty$

$\bar X f \in C^\infty$

$\bar X = X^i \underset{\text{гладкий базис}}{e_i}$

<u>Утв</u> $\bar X$ - гладкое $\Leftrightarrow$ $\forall i$ X^i гладкие функции

<u>Опр</u> ω - <u>гладкая</u> дифференциальная 1-форма, если $\forall$ гладкого векторного поля $\bar X$ функция $\omega(\bar X)$ гладкая

e^i двойственный базис

$\omega = \underset{\text{ф-ции}}{\omega_i} e^i$

<u>Утв</u> ω - гладкая $\Leftrightarrow$ $\forall i$ ω_i - гладкие функции

$$M \xrightarrow{F} N$$

$$T_AM \xrightarrow{d_AF} T_{F(A)}N$$

дифференциал отображения

<u>Линейный оператор</u>

$M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ линейно $\Rightarrow$

$T_A M \xrightarrow{d_A f} T_{f(A)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ ковектор

$\alpha \frac{d}{dt} \leftrightarrow \alpha$

df – дифференциал функции – это дифференциальная 1-форма, то есть ковекторное поле

$(df)_A = d_A f$

$\bar{X}$ – векторное поле.

Как найти $df(X)$?

$$d_A f(X)\varphi = X(\underset{\varphi\circ f}{\underset{\parallel}{f^*\varphi}})(A)$$

$\varphi = t$

$$\boxed{df(X) = Xf}$$

В к-тах $df(X) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = Xf$

Пусть $e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$ $\quad \bar{X} = \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$f = x^j \qquad df(X) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} =$

$= X^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = X^i \delta^j_i = X^j =$

$= e^j(X)$, т.е. мы доказали, что

$dx^j = e^j$

<u>Утв</u> Если $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ базис в векторных полях, то $e^i = dx^i$ — это двойственный базис в 1-формах

$\omega = \omega_i e^i$

если $e^i = dx^i$, то $\omega = \omega_i dx^i$

$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_i dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) =$

$= \omega_i \delta^i_j = \omega_j$

<u>Утв</u> $\omega_j = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$

<u>Следствие</u>

$$(df)_j = df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} f = \frac{\partial f}{\partial x^j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n}$$

линейная алгебра

V векторное пр-во

$V \ni v$ вектор

V^* двойственное

$V^* \ni \xi$ ковектор

$\xi : V \to \mathbb{R}$
линейная ф-ция на V

$V = (V^*)^* \Rightarrow v : V^* \to \mathbb{R}$
линейная ф-ция на V^*

$$v(\xi) = (\xi, v)$$

A билинейная форма

$A : V \times V \to \mathbb{R}$
билинейная ф-ция

B линейный оператор $B: V \longrightarrow V$

можно рассматривать как билинейную

ф-цию $V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$B(\xi, v) = (\xi, B(v)) \in \mathbb{R}$$

S — тензор типа $\binom{p}{q}$, если это

полилинейная ф-ция от

p ковекторов и q векторов

Мн-во таких объектов —

— линейное пр-во

$$T^p_q V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q \text{ раз}}$$

V, W два векторных пр-ва, то определим

$\underset{\text{тензорное произведение } V \text{ и } W}{\underline{V \otimes W}}$ как векторное пр-во

$$\left\{ \sum_i (v_i, w_i) \mid v \in V, w \in W \right\} \Big/ \sim$$

конечные суммы

$(v, \lambda w) \sim (\lambda v, w)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(v_1 + v_2, w) \sim (v_1, w) + (v_2, w)$

$(v, w_1 + w_2) \sim (v, w_1) + (v, w_2)$

$[(v, w)]$ обозначается $v \otimes w$

Упр $V \otimes W$ — пространство билинейных функций на $V^* \times W^*$

$$v \otimes w (\underset{\substack{\uparrow \\ V^*}}{\xi}, \underset{\substack{\uparrow \\ W^*}}{\eta}) = (\xi, v)(\eta, w)$$

$v_1, .., v_p \in V$

$\xi_1, .., \xi_q \in V^*$

$v_1 \otimes .. \otimes v_p \otimes \xi_1 \otimes .. \otimes \xi_q$ — такой элемент $T^p_q V$, что

$$\sigma_1\otimes\dots\otimes\sigma_p\otimes\xi_1\otimes\dots\otimes\xi_q(\underbrace{\omega^1,\dots,\omega^p}_{\text{ковекторы}},\underbrace{X_1,\dots,X_q}_{\text{векторы}}) =$$

$$=(\sigma_1,\omega^1)\dots(\xi_q,X_q).$$ Тогда

$$e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\dots\otimes e^{j_q}(\omega^1,\dots,\omega^p, X_1,\dots,X_q)=\omega^1_{i_1}\dots\omega^p_{i_p}X_1^{j_1}\dots X_q^{j_q}$$

<u>Упр</u> $e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\dots\otimes e^{j_q}$, $i_1,\dots,j_q=1,\dots,n$, образуют базис в T^p_qV

Анализ на многообразиях

Тензорные поля

T^p_qM пр-во тензорных полей типа $\binom{p}{q}$ на M

$S\in T^p_qM \Rightarrow \forall A\in M$

$$S_A \in T^p_q T_A M$$

$x^1, \dots, x^n$ $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ в $T_A M$

$e^j = dx^j$ в $T^*_A M$

$$S = \underbrace{S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}_{\text{Координаты тензорного поля } S \text{ в базисе}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

Замечание

1) Тензорное поле часто называют тензором
2) Тензор S отождествляется с набором его координат $S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$,

называемых компонентами тензора.

Замеч-е

$x^1, \dots, x^n \qquad x^{1'}, \dots, x^{n'}$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}$$

в. поле:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \underbrace{X^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}}_{X^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} X^i$$

1-формы:

$$\omega = \omega_i dx^i = \underbrace{\omega_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}}_{\omega_{i'}} dx^{i'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{i'} = \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

Аналогично для тензоров

$$S = S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_q} =$$

$$= \underbrace{S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\ldots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}}_{S^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}}\frac{\partial}{\partial x^{i'_1}}\otimes\ldots$$

$$\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i'_p}}\otimes dx^{j'_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j'_q}$$

Базис в векторных полях в U — это такой набор векторных полей $e_1,\ldots,e_n$ в U, что в каждой точке U векторы $e_1(A),\ldots,e_n(A)$ образуют базис в ТАМ.