Анализ на многообразиях.
Лекция 15.

① Алгебраические операции с тензорами

V - вект. пр-во

$$T^p_q V = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q}$$

пр-во полилинейных ф-ций от p ковекторов из V^* и q векторов из V

а) $+$

б) $\lambda \cdot$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Big\}$ $T^p_q V$ — линейное пространство.

в) $\otimes$ Тензорное умножение

$$\otimes : \underset{\substack{\Downarrow \\ S}}{T^{p_1}_{q_1} V} \times \underset{\substack{\Downarrow \\ T}}{T^{p_2}_{q_2} V} \to \underset{\substack{\Downarrow \\ S \otimes T}}{T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2} V}$$

$$(S\otimes T)(\xi_1,\dots,\xi_{p_1+p_2},v_1,\dots,v_{q_1+q_2})=$$

$$\xi\in V^*,\quad v\in V$$

$$=S(\xi_1,\dots,\xi_{p_1},v_1,\dots,v_{q_1})\,T(\xi_{p_1+1},\dots,\xi_{p_1+p_2},v_{q_1+1},\dots,v_{q_1+q_2})$$

$$S=S^{i_1\dots i_{p_1}}_{j_1\dots j_{q_1}}e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_{p_1}}\otimes e^{j_1}\otimes\dots\otimes e^{j_{q_1}}$$

$$T=\dots$$

$$S^{i_1\dots i_{p_1}}_{j_1\dots j_{q_1}}=S(e^{i_1},\dots,e^{i_{p_1}},e_{j_1},\dots,e_{j_{q_1}})$$

$$T^{i_{p_1+1}\dots i_{p_1+p_2}}_{j_{q_1+1}\dots j_{q_1+q_2}}=T(e^{i_{p_1+1}},\dots)$$

$$(S\otimes T)^{i_1\dots i_{p_1+p_2}}_{j_1\dots j_{q_1+q_2}}=S^{i_1\dots i_{p_1}}_{j_1\dots j_{q_1}}T^{i_{p_1+1}\dots i_{p_1+p_2}}_{j_{q_1+1}\dots j_{q_1+q_2}}$$

<u>Пример</u> $v\in V=T^1_0V$

$$\xi\in V^*=T^0_1V$$

$$\xi\otimes v\in T^1_1V$$ пр-во линейных операторов

$$(\xi\otimes v)^i_j=v^i\xi_j$$

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} (\xi^1 \dots \xi^n) = \begin{pmatrix} v^1\xi^1 & v^1\xi^2 & \dots \\ v^2\xi^1 & v^2\xi^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = A$$

$\mathrm{rk}\, A = 1$

$$TV = \bigoplus_{p,q=0} T^p_q V$$ полная тензорная алгебра

$T^0_0 V = \mathbb{R}$

г) свёртка пары индексов

A линейный оператор $\qquad \mathrm{tr}\, A$

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$\Rightarrow \mathrm{tr}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}(ACC^{-1}) = \mathrm{tr}\, A$

$\Rightarrow \mathrm{tr}\, A$ не зависит от выбора базиса

$A = A^i_j e_i \otimes e^j$

$\mathrm{tr}\, A = A^i_i = A^1_1 + \dots + A^n_n$

Упр. Точно так же корректно определена и не зависит от базиса операция

$$T^{i_1 \dots i_k \dots i_p}_{j_1 \dots j_l \dots j_q} \mapsto \overset{\uparrow}{\underset{i}{\sum}} T^{i_1 \dots \overset{k}{i} \dots i_p}_{j_1 \dots \underset{l}{i} \dots j_q}$$

свертка по индексу i_k и j_l

Пример $T^{ij}_{k\underline{l}}$ $\qquad T^{ij}_{ki} = T^{1j}_{k1} + T^{2j}_{k2} + \dots$

обобщение следа

$$T^p_q V \to T^{p-1}_{q-1} V$$

V $\quad \langle , \rangle$ евклидово скалярное произведение

билинейная ф-ция = тензор типа $\binom{0}{2}$

<u>метрика</u> $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$

$g_{ij} = g(e_i, e_j) = \langle e_i, e_j \rangle$ матрица Грама

скалярного произведения $\langle , \rangle$

Важное соглашение: через g^{ij} мы обозначаем элементы матрицы $(g_{ij})^{-1}$

Упр. $g^{ij} e_i \otimes e_j$ — корректно определенный тензор типа $\binom{2}{0}$

g^{ij} называют "метрика с поднятыми индексами".

д) В евклидовом пр-ве есть операции опускания и подъема индекса

$$\underset{T \otimes g}{\underline{T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\, g_{ij}}} \longrightarrow T^{i_1\ldots \overset{k}{i}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\, g_{ij}$$

свертка одного верхнего индекса T и одного индекса g

$$T^p_q V \to T^{p-1}_{q+1} V$$

Опускание индекса у тензора

$$\frac{T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} g^{ij}}{T \otimes g^{-1}} \longrightarrow T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \underset{\ell}{i} \ldots j_q} g^{ij}$$

свёртка по одному нижнему индексу T и одному индексу g

$$T^p_q V \to T^{p+1}_{q-1} V$$

подъём индекса у тензора

Что это значит?

Если есть $\langle , \rangle$, то $V \simeq V^*$

$v \in V \quad v \longmapsto \xi \in V^*$

$$\xi(w) = \langle v, w \rangle \quad (*)$$

$\xi = \xi_i e^i, \; v = v^j e_j, \; w = w^k e_k$

$(*) \quad \xi_i w^i = v^j w^k g_{jk}, \; \text{т.к.}$

$$\xi(w) = \xi_i e^i(w^k e_k) = \xi_i w^k e^i(e_k) =$$
$$= \xi_i w^k \delta^i_k = \xi_i w^i$$
$$\langle v, w\rangle = \langle v^j e_j, w^k e_k\rangle =$$
$$= v^j w^k \langle e_j, e_k\rangle = v^j w^k g_{jk}$$

Но $\xi_i w^i = v^j w^k g_{jk} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подставим $w^i = \delta^i_l$

$$\xi_i \delta^i_l = v^j \delta^k_l g_{jk}$$
$$\xi_l = v^j g_{jl}$$

ξ — опускание индекса у вектора v

$V \xrightarrow{\langle,\rangle} V^*$ опускание индекса

$V^* \xrightarrow{\langle,\rangle} V$ поднимание индекса

$$T^p_q V = V \otimes \underset{\underset{V^*}{\wr\!\!\shortparallel}}{\underline{V}} \otimes V \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*$$

опускание индекса

С тензорными полями все эти операции делаются поточечно

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

$A \in M \qquad T(A) \in T^p_q T_A M$

$(T+S)(A) = T(A) + S(A)$

$(T \otimes S)(A) = T(A) \otimes S(A)$

$\vdots$

$T^0_q V$ пространство полилинейных функций от q векторов

$\cup$

$S^2 V^*$ симметрические билинейные ф-ции.

$g \in S^2 V^*$

метрика

$V \quad e_1, \dots, e_n$

$T^0_2 V$ базис $e^{i_1} \otimes e^{i_2}$

$1 \le i_1, i_2 \le n$

$\cup$

$S^2 V^*$ базис $e^i \cdot e^j = \dfrac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}$

$1 \le i \le j \le n$

$$b = b_{ij} e^i \otimes e^j = \sum_{i \le j} b_{ij} e^i \otimes e^j +$$

$$+ \sum_{i > j} b_{ij} e^i \otimes e^j = \sum_{i \le j} b_{ij} e^i \otimes e^j +$$

$i \leftrightarrow j$

$$+ \sum_{i < j} b_{ij} e^j \otimes e^i = \sum_{i \le j} 2 b_{ij} \frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2} =$$

$$= \sum_{i \le j} 2 b_{ij} e^i \cdot e^j = \sum_{i,j} b_{ij} e^i \cdot e^j$$

Метрика часто пишете

$$g = g_{ij} dx^i dx^j$$

$\uparrow$

$\cdot$

$$T^0_q V$$

$$\cup$$

$\Lambda^q V^*$ пр-во кососимметрических полилинейных ф-ций от q векторов

<u>Наблюдение</u> $S^2 V^*$, $\Lambda^q V^*$ — векторные подпр-ва $T^0_q V$

$$\Lambda V^* = \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q V^*$$

$n = \dim V$, $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$

это алгебра относительно операции внешнего умножения

Λ (\wedge в LaTeX'е)

$$\Lambda : T^p V^* \times T^q V^* \to T^{p+q} V^*$$

Есть два разных соглашения об определении Λ

$\alpha \in \Lambda^p V^*$, $\beta \in \Lambda^q V^*$

$\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} V^*$

A) $\alpha \wedge \beta(\underset{V}{X_1}, \dots, \underset{V}{X_{p+q}}) =$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} (\operatorname{sgn} \pi)\, \alpha(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)})\, \beta(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)})$$

B) $\dfrac{1}{(p+q)!}$

__Пример__ $p=1, q=1$

A) $\alpha \wedge \beta(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$

В) $\alpha \wedge \beta(X,Y) = \dfrac{\alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)}{2}$

A – наш выбор

Свойства внешнего произведения.

$\alpha \in \Lambda^p V^* \Rightarrow |\alpha| = \deg \alpha = p$

степень = число аргументов

1) $\deg(\alpha \wedge \beta) = \deg \alpha + \deg \beta$

2) $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$

$\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$

3) $\lambda \in \mathbb{R} = \Lambda^0 V$

$\lambda \wedge \alpha = \lambda \alpha$

4) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \cdot \deg \beta} \beta \wedge \alpha$

$((-1)^p)^q = (-1)^{pq}$

5) $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$

ассоциативность — см. книги по линейной алгебре

$\Lambda V^* = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p V^*$ является

градуированной коммутативной алгеброй

$e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_p}$

Упр 1 $\omega^1,\ldots,\omega^p \in V^* = \Lambda^1 V^*$

$X_1,\ldots,X_p \in V$

$\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^p \in \Lambda^p V^* \Rightarrow$

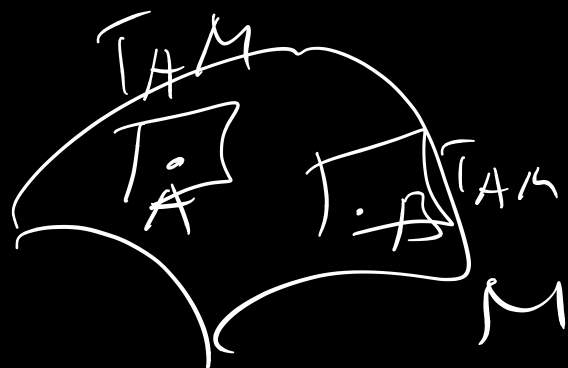
$$\Rightarrow \omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^p(X_1,\ldots,X_p) = \begin{vmatrix} \omega^1(X_1) & \ldots & \omega^1(X_p) \\ \omega^2(X_1) & \ldots & \omega^2(X_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^p(X_1) & \ldots & \omega^p(X_p) \end{vmatrix}$$

Упр 2 $e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_p}$, $i_1<\ldots<i_p$,

образуют базис в $\Lambda^p V^*$

ковекторы $\longrightarrow$ поле ковекторов = = дифференциальные 1-формы

к/симм. полилин. ф-ции от p векторов $\longrightarrow$ поле к/симм. ф-ций от p векторов = = дифференциальные p-формы



$$\omega_A \in \Lambda^p T_A M, \ \omega_B \in \Lambda^p T_B M \dots$$

в лок. к-тах $x^1, \dots, x^n$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p}(x^1, \dots, x^n)\, \underbrace{dx^{i_1}}_{= e^{i_1}} \wedge \dots \wedge \underbrace{dx^{i_p}}_{= e^{i_p}}$$

им $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

$U \subset M$
открытое мн-е

$\Omega^p(U)$ пр-во дифференциальных p-форм на U.

$$\Omega(U) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p(U), \quad n = \dim M.$$

$\Lambda^p V^* = 0$ при $p > \dim V$

<u>Опр</u> $\mathcal{D}$ — дифференцирование градуированной алгебры $(A, \cdot)$ $\left(A = \bigoplus_{k=0} A^k\right)$ степени k, если

1) $\mathcal{D} : A \to A$

для однородных эл-тов, то есть одной степени:

2) $\deg(\mathcal{D}\alpha) = \deg\alpha + k$

3) $\mathcal{D}(\alpha + \beta) = \mathcal{D}\alpha + \mathcal{D}\beta$

4) $\mathcal{D}(\alpha \cdot \beta) = \mathcal{D}\alpha \cdot \beta + (-1)^{k \deg\alpha} \alpha \cdot \mathcal{D}\beta$

Для неоднородных:

$$D((\alpha_1+\alpha_2)\cdot\beta) = D(\alpha_1\cdot\beta) + D(\alpha_2\cdot\beta) =$$

$$= D\alpha_1\cdot\beta + D\alpha_2\cdot\beta + (-1)^{k\deg\alpha_1}\alpha_1\cdot D\beta +$$

$$+ (-1)^{k\deg\alpha_2}\alpha_2\cdot D\beta$$

на $\Omega(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p(M)$ есть три замечательных дифференцирования:

i_X контракция с векторным полем X, степени -1

d внешний дифференциал, степени $+1$

L_X производная Ли вдоль векторного поля X, Степени 0

ι_X на самом деле алгебраическая операция

$V \qquad \Lambda^p V^* \ni \sigma$

$X \in V$

$$\iota_X \sigma \in \Lambda^{p-1} V^*$$

Определение зависит от соглашения в определении Λ

(A) $\iota_X \sigma(X_1, \dots, X_{p-1}) = \sigma(X, X_1, \dots, X_{p-1})$

(B) $\iota_X \sigma(X_1, \dots, X_{p-1}) = p\,\sigma(X, X_1, \dots, X_{p-1})$

По определению $\iota_X \sigma = 0$ для $\sigma \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$

<u>Утв</u> Верны утверждения:

— если $X \in V$

1) $\iota_X : \Lambda V^* \to \Lambda V^*$

2) $\deg(\iota_X \sigma) = \deg \sigma - 1$

3) $\iota_X(\sigma_1 + \sigma_2) = \iota_X \sigma_1 + \iota_X \sigma_2$

4) $\iota_X(\sigma \wedge \tau) = \iota_X \sigma \wedge \tau +$

$$+ (-1)^{\deg \sigma} \sigma \wedge \iota_X \tau$$

Для форм всё похоже

X – в. поле $\qquad \omega \in \Omega^p(n)$

$$(\iota_X \omega)_A = \iota_{X(A)} \omega_A$$

---

d и L_X не алгебраические, это дифференциальные операторы

Определим $d : \Omega^p(n) \to \Omega^{p+1}(n)$ как операцию, удовлетворяющую аксиомам:

1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$

2) $d(\sigma \wedge \tau) = d\sigma \wedge \tau + (-1)^{\deg \sigma} \sigma \wedge d\tau$

3) для $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$

df – просто дифференциал ф-ции

$df \in \Omega^1(U)$.

4) $d^2 = 0$

Утв Существует единственная операция d с данными свойствами