Анализ на многообразиях.
Лекция 16.

0) M мн-е, $\dim M = n$
$U \subset M$ область

$\Omega^k(U)$ пр-во дифференциальных k-форм на U

$\Omega(U) = \bigoplus_{k=0} \Omega^k(U)$ градуированная алгебра дифференциальных форм

$+, \cdot, \wedge$

ι_X контракция с векторным полем X (внутреннее умножение на поле X)

ι_X — дифференцирование степени -1 алгебры $\Omega(U)$

① d внешний дифференциал

$$d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$$

это дифференцирование алгебры $\Omega(U)$ степени $+1$

Аксиомы d:

1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
2) $d(\sigma \wedge \tau) = d\sigma \wedge \tau + (-1)^{\deg \sigma} \sigma \wedge d\tau$

3) Для $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$
df совпадает с обычным дифференциалом ф-ции, т.е.

$df(X) = Xf$

4) $d^2 = 0$

Утв Существует единственный оператор d с данными свойствами.

► 1) предположим, что d есть.

$x^1,\dots,x^n$ лок. к-ты

$\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ базис в векторных полях

$dx^1,\dots,dx^n$ – двойственный к $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ базис в 1-формах

$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $e^i = dx^i$

$e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}$ $i_1<\dots<i_k$ – базис в k-формах $\Rightarrow$ любая k-форма ω записывается как

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k}\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

$\omega_{i_1\dots i_k}$ – функции от $x^1,\dots,x^n$

$$d(dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}) \overset{(2)}{=} \underset{0}{\underset{(4)\,\|}{d^2x^{i_1}}}\wedge dx^{i_2} - dx^{i_1}\wedge \underset{0}{\underset{(4)\,\|}{d^2x^{i_2}}} = 0$$

$$\vdots$$

$$d(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}) \overset{(2)}{=} \underset{0}{\underset{(4)\,\|}{d^2x^{i_1}}}\wedge(dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_2}) -$$

$$- dx^{i_1}\wedge \underset{0}{\underset{\|}{d(dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})}} = 0$$

Тогда

$$d\omega \overset{(1)}{=} \sum_{i_1<\ldots<i_k} d(\omega_{i_1\ldots i_k}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}) \overset{(2)}{=}$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_k} (d\omega_{i_1\ldots i_k})\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} +$$

$$+ \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}\, \underset{0}{\underset{(4)\,\|}{\underline{d(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})}}} =$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i}\, dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

То есть d, удовлетворяющий аксиомам 1)-4) однозначно считается по формуле

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i}\, dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ если d есть, то он единственен.

2) пусть есть координатная окрестность.

Определим d формулой (*)

Проверим аксиомы:

1) очевидно

2) Так как 1) уже есть, достаточно проверить для $\sigma = f\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$

и $\tau = g\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}$

$$\sigma\wedge\tau = fg\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}$$

$$d(\sigma\wedge\tau) = \frac{\partial(fg)}{\partial x^i}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^i}\, g\, dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q} +$$

$$+ f\,\frac{\partial g}{\partial x^i}\, dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}}_{d\sigma}\wedge\underbrace{g\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}}_{\tau} +$$

$$+ (-1)^{\deg\sigma = p}\underbrace{f\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}}_{\sigma}\wedge\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x^i}\, dx^i\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}}_{d\tau} =$$

$$= d\sigma \wedge \tau + (-1)^{\deg \sigma} \sigma \wedge d\tau$$

3) очевидно

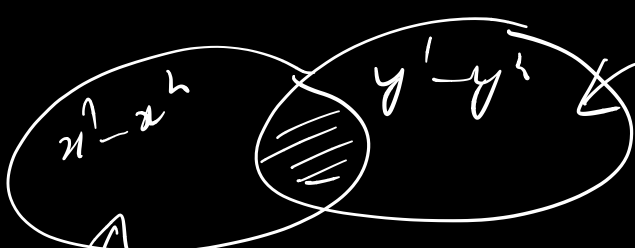
4) т.к. 1 верно, достаточно проверить для

$$\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

$$d^2\omega = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}}_{\text{симм при } i \leftrightarrow j} \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_{\text{к/симм при } i \leftrightarrow j}}_{0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = 0$$

$\Rightarrow$ d, определенная по формуле (*), удовлетворяет всем аксиомам



$$u = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \tilde{\omega}\, dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_n}$$

$$d''u = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^i} dy^i \wedge dy^{i_1} \wedge \ldots$$

$$d'\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_?}$$

$d' = d''$ т.к. дифференциал единственен.

$\Rightarrow$ d корректно определен на всем M $\blacktriangleleft$

2) $M \xrightarrow{F} N$ гладкое отображение многообразий.

$C^\infty(M) \xleftarrow{F^*} C^\infty(N)$

$F^*\varphi = \varphi \circ F$ обратный образ функции φ

$T_A M \xrightarrow{d_A F} T_{F(A)} N$ дифференциал F в точке A

$$\underset{T_A M}{d_A F(X)}\ \underset{C^\infty(N)}{\varphi} = X(F^*\varphi)$$

$\Omega^k(M) \xleftarrow{F^*} \Omega^k(N) \ni \omega$ обратный образ

$$\underset{\Omega^k(M)}{F^*\omega}(\underset{T_A M}{X_1, \dots, X_k}) = \omega(d_A F(X_1), \dots, d_A F(X_k))$$

__Утв__ 1) $F^*(\omega_1 + \omega_2) = F^*\omega_1 + F^*\omega_2$

2) $F^*(\sigma \wedge \tau) = F^*\sigma \wedge F^*\tau$

3) $F^*: \Omega(N) \to \Omega(M)$ гомоморфизм градуированных алгебр

4) $F^* d\omega = dF^*\omega$

▷ 1) очевидно

2) сразу же из явной формулы для $\wedge$

3) из 1) и 2)

4) проверим это свойство сначала для $\omega = f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$

$$(F^* df)(X) = df(dF(X)) =$$

$$= dF(X) f \overset{\text{в силу опред. } dF}{=\!=\!=} X(F^* f) =$$

$$= (d(F^* f))(X),$$ то есть $F^* d = d F^*$

на 0-формах

Для произвольных форм:

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

$$F^* d\omega = F^* \Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \Big) =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} F^* (d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} F^* d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge F^* dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge F^* dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} dF^* \omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dF^* x^{i_1} \wedge \ldots \wedge dF^* x^{i_k}$$

$$dF^*\omega = d\Big(\sum_{i_1<\dots<i_k} F^*\omega_{i_1\dots i_k}\wedge F^*dx^{i_1}\wedge\dots\wedge F^*dx^{i_k}\Big) =$$

$$= d\Big(\sum_{i_1<\dots<i_k} F^*\omega_{i_1\dots i_k}\wedge dF^*x^{i_1}\wedge\dots\wedge dF^*x^{i_k}\Big) =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} dF^*\omega_{i_1\dots i_k}\wedge dF^*x^{i_1}\wedge\dots\wedge dF^*x^{i_k} +$$

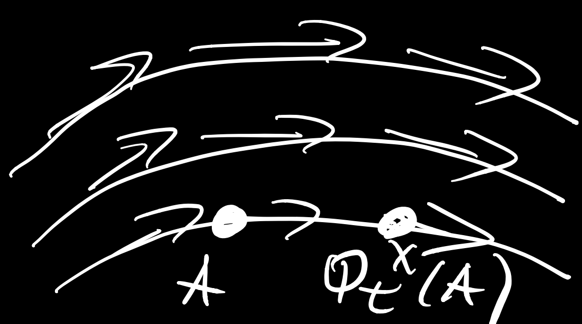
$$+ \sum_{i_1<\dots<i_k} F^*\omega_{i_1\dots i_k}\wedge \underbrace{d\big(dF^*x^{i_1}\wedge\dots\wedge dF^*x^{i_k}\big)}_{=0} =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} dF^*\omega_{i_1\dots i_k}\wedge dF^*x^{i_1}\wedge\dots\wedge dF^*x^{i_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F^*d\omega = dF^*\omega \quad \blacktriangleleft$$

3 $L_X : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$

производная Ли дифференциальных форм вдоль векторного поля X



интегральные кривые векторного поля X

$\Phi_t^X : M \to M$ диффеоморфизм

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$A = (A^1, \dots, A^n)$

интегральная кривая $\gamma(t, A)$, которая при $t = 0$ проходит через точку A, является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}^i = X^i(x^1, \dots, x^n), \; i = 1, \dots, n \\ x^i(0) = A^i, \; i = 1, \dots, n \end{cases}$$

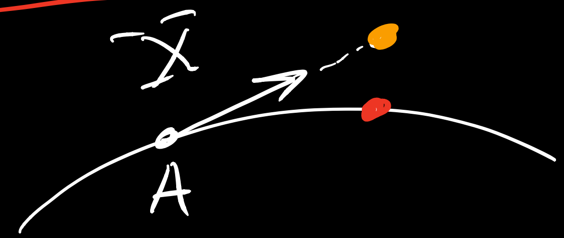
$$\Phi_t^X(A) = \gamma(t, A)$$

$$f(t) = f(0) + t\dot{f}(0) + o(t) \Rightarrow$$

$$x^i(t) = \underset{A^i}{\underset{\parallel}{x^i(0)}} + t \underset{X^i(A^1, \dots, A^n)}{\underset{\parallel}{X^i(x^1(0), \dots, x^n(0))}} + o(t)$$

поэтому получаем утв:

$$\underline{(\varphi_t^X(A))^i} = \underline{A^i + tX^i(A^1,\dots,A^n) + o(t)}$$



$$\varphi_t^X : M \to M$$

$$\Omega^k(M) \xleftarrow{(\varphi_t^X)^*} \Omega^k(M)$$

<u>Определение</u>: Производная Ли $L_X\omega$ формы ω вдоль векторного поля X определяется как

$$L_X\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^X)^*\omega$$

<u>Утв.</u> 1) $L_X : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$

2) $L_X(\omega_1 + \omega_2) = L_X\omega_1 + L_X\omega_2$

3) $L_X(\sigma\wedge\tau) = L_X\sigma\wedge\tau +$
$+\sigma\wedge L_X\tau$

▶ 1) очевидно

2) следует из $F^*(\omega_1+\omega_2) = F^*\omega_1 + F^*\omega_2$

3) $L_X(\sigma\wedge\tau) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^X)^*(\sigma\wedge\tau) =$

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left((\varphi_t^X)^*\sigma\wedge(\varphi_t^X)^*\tau\right) =$

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^X)^*\sigma\wedge(\varphi_t^X)^*\tau\Big|_{t=0} +$

$+ (\varphi_t^X)^*\sigma\Big|_{t=0}\wedge\frac{d}{dt}(\varphi_t^X)^*\tau =$

$= L_X\sigma\wedge\tau + \sigma\wedge L_X\tau$ ◀

<u>Следствие</u> L_X — дифференцирование степени 0 градуированной алгебры дифференциальных форм.

$f \in \Omega^0 = C^\infty$

$L_X f - ?$

$$L_X f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^X)^* f =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \varphi_t^X \ominus$$

$$\varphi_t^X(x^1, \dots, x^n) = (x^1 + t\bar{X}^1(x^1, \dots, x^n) + o(t), \dots, x^n + t\bar{X}^n(x^1, \dots, x^n) + o(t))$$

$$\ominus \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x^1 + t\bar{X}^1(x^1, \dots, x^n) + o(t), \dots, x^n + t\bar{X}^n(x^1, \dots, x^n) + o(t)) =$$

$$= \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} \bar{X}^i(x^1, \dots, x^n) = \bar{X} f$$

Т.е. мы доказали что

$\underline{\underline{\text{Утв}}}$ $L_X f = \bar{X} f$

Как на практике найти обратный

образ форм?

$$M \xrightarrow{F} N$$

$x^1,\dots,x^n$ $\qquad$ $y^1,\dots,y^n$ $\qquad$ лок. к-ты

F в лок. к-тах $x^1,\dots,x^n$ на M и $y^1,\dots,y^n$ на N имеет вид:

$$y^1 = y^1(x^1,\dots,x^n),$$
$$\vdots$$
$$y^n = y^n(x^1,\dots,x^n).$$

$\omega \in \Omega^k(N) \Rightarrow$ локально

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k}(y^1,\dots,y^n)\, dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_k}$$

Тогда

$$F^*\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} F^*(\omega_{i_1\dots i_k}\, dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_k}) =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} F^*\omega_{i_1\dots i_k} \wedge F^*dy^{i_1}\wedge\dots\wedge F^*dy^{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} F^*\omega_{i_1\dots i_k} \wedge dF^* y^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^* y^{i_k} =$$

все свелось к обратному образу функции, то есть <u>надо просто взять композицию</u>

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k}\left(y^1(x^1,\dots,x^n),\dots,y^n(x^1,\dots,x^n)\right) dy^1(x^1,\dots,x^n) \wedge \dots$$

$$\dots \wedge dy^n(x^1,\dots,x^n)$$

<u>Пример</u> $F: \underset{x,y}{\mathbb{R}^2} \to \underset{u,v}{\mathbb{R}^2}$

$$\omega = (u^2+v^2)\, du \wedge dv$$

$$F: \quad u = x^2-y^2, \quad v = 2xy$$

$$F^*\omega = \left((x^2-y^2)^2+(2xy)^2\right) d(x^2-y^2) \wedge d(2xy) = (x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2)\cdot$$

$$\cdot(2x\,dx-2y\,dy)\wedge(2y\,dx+2x\,dy) =$$

$$= (x^2+y^2)^2\, 4(x^2+y^2)\, dx\wedge dy =$$

$$= 4(x^2+y^2)^3\, dx \wedge dy$$

$\omega \in \Omega^1(U)$

$\omega = \omega_i\, dx^i$

$$(\varphi_t^X)^* \omega = \omega_i\big(x^1 + tX^1(x^1,\dots,x^n) + o(t), \dots, x^n + tX^n(x^1,\dots,x^n) + o(t)\big) \cdot d\big(x^i + tX^i(x^1,\dots,x^n) + o(t)\big)$$

$$L_X \omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^X)^* \omega =$$

$$= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j dx^i + \omega_i\, dX^i =$$

$$= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j dx^i + \underbrace{\omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^k} dx^k}_{i \to j,\ k \to i} =$$

$$= \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j + \omega_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) dx^i$$

<u>Ytb</u> $L_X(\omega_i dx^i) =$

$$= \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j + \omega_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) dx^i .$$

<u>Упр</u> Найти явную формулу для производной Ли для k-форм.

<u>Утв</u> L_X коммутирует с d, то есть

$$L_X d\omega = d L_X \omega$$

▶ $$L_X d\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\varphi^X_t\right)^* d\omega =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d \left(\varphi^X_t\right)^* \omega =$$

$$= d \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\varphi^X_t\right)^* \omega =$$

$$= d L_X \omega$$ ◀

$$L_X \Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \Big) = \ldots$$

Другой способ для 1-форм:

$$L_X(\omega_i dx^i) = L_X \omega_i \cdot dx^i + \omega_i L_X dx^i = (X\omega_i)\, dx^i + \omega_i\, d L_X x^i =$$

$$= (X\omega_i)\, dx^i + \omega_i\, d(X x^i) =$$

$$= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} X^k dx^i + \omega_i\, d X^i = \dots$$