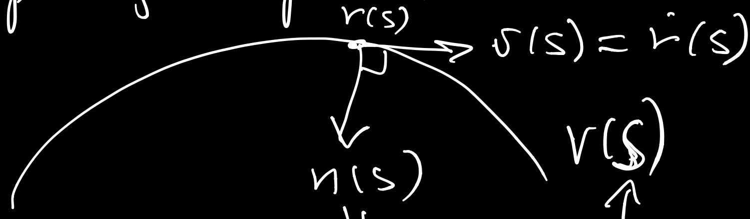
Анализ на многообразиях
Лекция 6

Кривизна кривых в $\mathbb{E}^3$



$$n(s) = \frac{\ddot{r}(s)}{|\ddot{r}(s)|} = \frac{\dot{v}(s)}{k(s)}$$

s — натуральный параметр

s — натуральный, то $|v| = 1$, $n \perp v$

Выберем ориентацию в $\mathbb{E}^3$

$b(s) = [v(s), n(s)]$ бинормаль

$v(s), n(s), b(s)$ — о/н базис

Базис Френе

$r(s); v(s), n(s), b(s)$

репер Френе

Попробуем вывести формулы Френе

$\dot{v}(s) = k(s) n(s)$ как и раньше

$\dot{n}(s)$? $|n| = 1 \Rightarrow \dot{n} \perp n \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{n}(s) = \lambda(s) v(s) + \varkappa(s) b(s)$

$\langle n(s), v(s) \rangle = 0$

$\Downarrow$

$\langle \dot{n}, v \rangle + \langle n, \dot{v} \rangle = 0$

$\langle \lambda v + \varkappa b, v \rangle + \langle n, kn \rangle = 0$

$\lambda + k = 0 \Rightarrow \lambda(s) = -k(s)$

$\dot{n}(s) = -k(s) v(s) + \varkappa(s) b(s)$

<u>Опр</u> $\varkappa(s) = \langle \dot{n}(s), b(s) \rangle$, где s - натуральный параметр, называется кручением кривой

$\dot{b} = \frac{d}{ds}[v, n] = [\dot{v}, n] + [v, \dot{n}] =$

$= [+kn, n] + [v, -kv + \varkappa b] =$

$= \varkappa [\overset{\shortparallel}{\underset{0}{}} v, b] = -\varkappa n$

<u>Утв</u> (Формулы Френе):

$$\begin{cases} \dot{v}(s) = k(s) n(s) \\ \dot{n}(s) = -k(s) v(s) + \varkappa(s) b(s) \\ \dot{b}(s) = -\varkappa(s) n(s) \end{cases}$$

Замечание 1) $k = |\ddot{r}| \geq 0$

2) если $k = 0$, то ν не определено и репера Френе нет

3) $\varkappa$ может иметь любой знак

Пример Винтовая линия

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht \end{cases}$$

$$r(t) = (R\cos t, R\sin t, ht)$$

$$\frac{dr}{dt} = (-R\sin t, R\cos t, h)$$

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{R^2+h^2}$$

$$r(s) = \left(R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, \frac{hs}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

$$\frac{dr}{ds} = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1 \Rightarrow s$ — натуральный параметр

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \left(-\frac{R}{R^2+h^2}\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, -\frac{R}{R^2+h^2}\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, 0\right)$$

$$k = \left|\frac{d^2 r}{ds^2}\right| = \frac{R}{R^2+h^2}$$

$$v = \frac{dr}{ds}$$

$$n = \frac{\frac{d^2 r}{ds^2}}{k} = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, 0\right)$$

$$\dot n = \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, -\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}, 0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} b = [v, n] = \ldots\ldots \\ \varkappa = (\dot n, b) = \ldots\ldots \leftarrow \text{константа} \end{array}\right\} \text{Упр}$$

<u>Теорема</u> Пусть даны две функции $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ и $g:(a,b)\to\mathbb{R}$, т.ч. они гладкие и $f>0$. Тогда существует кривая в $\mathbb{E}^3$ с $k(s)=f(s)$ и $\varkappa(s)=g(s)$ и она единственна с точностью до движения пространства.

▷ Рассмотрим систему ОДУ

$$\begin{cases} \dot v(s) = f(s)n(s) \\ \dot n(s) = -f(s)v(s) + g(s)b(s) \\ \dot b(s) = -g(s)n(s) \\ \dot r(s) = v(s) \end{cases} \quad (*)$$

Добавим начальные условия:

1) выберем $s_0 \in (a,b)$

2) выберем точку $r_0 \in \mathbb{E}^3$

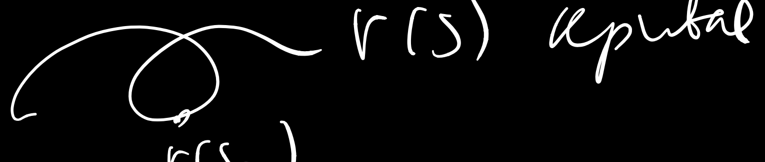
3) выберем о/н положит. ориентированный базис v_0, n_0, b_0

4) рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} * \\ r(s_0) = r_0 \\ v(s_0) = v_0 \\ n(s_0) = n_0 \\ b(s_0) = b_0 \end{cases}$$

Система (*) линейна $\Rightarrow$ по теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейных ОДУ,

$\exists$ единственное решение $r(s), v(s), n(s), b(s)$, определенное на всем (a, b)



Рассмотрим $g_{11}(s) = \langle v(s), v(s) \rangle$,

$g_{12}(s) = \langle v(s), n(s) \rangle$, $g_{13}^{(s)} = \langle v(s), b(s) \rangle$,

$g_{22}^{(s)} = \langle n(s), n(s) \rangle$, $g_{23}^{(s)} = \langle n(s), b(s) \rangle$,

$g_{33}(s) = \langle b(s), b(s) \rangle$

Они удовлетворяют системе ОДУ

$\dot{g}_{11}(s) = 2 \langle \dot{v}(s), v(s) \rangle = 2 f(s) \langle n(s), v(s) \rangle =$

$= 2 f(s)\, g_{12}(s)$

$$\begin{cases} \dot{g}_{11}(s) = 2 f(s)\, g_{12}(s) \\ \dot{g}_{12}(s) = \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Добавим начальные данные

$$\begin{cases} g_{11}(s_0) = \langle v(s_0), v(s_0) \rangle = \langle v_0, v_0 \rangle = 1 \\ g_{12}(s_0) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Задача Коши

Можно проверить, что ее решением

будет $g_{11}(s) = g_{22}(s) = g_{33}(s) \equiv 1$,

$g_{12}(s)=g_{13}(s)=g_{23}(s)\equiv 0$

но это решение единственное $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall s$ $v(s), n(s), b(s)$ образуют о/н базис

Более того, 1) $|\dot{r}(s)| = |v(s)| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow s$ - нат. параметр на кривой $r(s)$

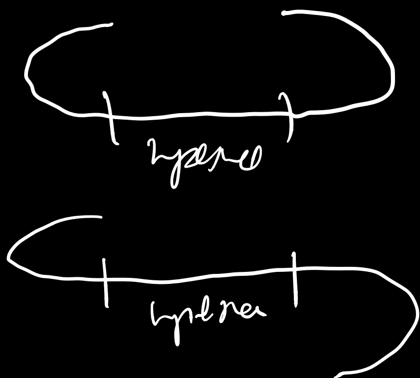
2) $k(s) \underset{\text{т.к. } s\text{-натуральный}}{=} |\dot{v}(s)| = |f(s)\,n(s)| =$

$= |f(s)| = f(s)$

3) $\varkappa(s) = \langle \dot{n}(s), b(s) \rangle = g(s)$

Решение найдено с точностью до выбора точки r_0 и о/н положит. ориент. базиса v_0, n_0, b_0

$\Rightarrow$ кривая определена с точностью до движения пространства ◄



пример того, что знаковая кривизна E_0 важна

$\mathbb{E}^2$ не нужна ориентация

$\mathbb{E}^3$ нужна ориентация

можно использовать ориентацию

и определить так, что v, n — положит. ориентир. о/н базис

$$\begin{cases} \dot v = k_0(s)\, n \\ \dot n = -k_0(s)\, v \end{cases}$$

ориентированная кривизна

Случай $\mathbb{E}^n$

Выберем ориентацию

$$\begin{array}{lcl}
\dot{r}(s) & & g_1(s) \\
\ddot{r}(s) & \xrightarrow[\text{и отнормируем}]{\text{ортогонализуем Грама-Шмидта}} & g_2(s) \\
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{d^{n-1} r}{ds^{n-1}}(s) & & g_{n-1}(s)
\end{array}
\quad \xrightarrow[\text{ориент. базиса}]{\text{дополним } g_n(s) \text{ до ОН положит.}} \quad
\begin{array}{l}
g_1(s) \\
\vdots \\
g_n(s)
\end{array}$$

базис Френе

Напишем аналог формулы Френе

$$\begin{pmatrix} g_1(s+\varepsilon) \\ \vdots \\ g_n(s+\varepsilon) \end{pmatrix} = \underset{\substack{\cap \\ SO(n)}}{\begin{pmatrix} \quad A(s,\varepsilon) \quad \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} g_1(s) \\ \vdots \\ g_n(s) \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$A(s,0) = E$$

$$A(s,\varepsilon) A^T(s,\varepsilon) = E$$

продифф:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} A(s,\varepsilon) \cdot A^T(s,\varepsilon) + A(s,\varepsilon) \frac{\partial A^T}{\partial \varepsilon}(s,\varepsilon) = 0$$

подставим $\varepsilon = 0$

и назовём $B(s) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} A(s,0)$

$$B(s)+B^T(s)=0$$

т.е. $B(s)$ к/симм матрица

продифференцируем (*) по ε

и положим $\varepsilon=0$

$$\begin{pmatrix} \dot g_1(s)\\ \vdots \\ \dot g_n(s)\end{pmatrix} = B(s)\begin{pmatrix} g_1(s)\\ \vdots\\ g_n(s)\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_1(s)&=F_1(\dot r)\\ g_2(s)&=F_2(\dot r,\ddot r)\\ &\vdots \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \dot g_1(s)&=G_1(\dot r,\ddot r)=H_1(g_1,g_2)\\ \dot g_2(s)&=G_2(\dot r,\ddot r,\dddot r)=H_2(g_1,g_2,g_3)\\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} * & * & 0 & \cdots & 0\\ * & * & * & 0 \cdots & 0\\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

но B к/симм $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} 0 & x_0 & 0 & \cdots & 0\\ -x_0 & \ddots & x_1 & 0 \cdots & 0\\ 0 & -x_1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & x_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & -x_{n-2} & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot g_1 = x_0 g_2 \quad (**) \\ \dot g_2 = -x_0 g_1 + x_1 g_3 \\ \dot g_3 = -x_1 g_2 + x_2 g_4 \\ \quad\vdots \\ \dot g_n = -x_{n-2} g_{n-1} \end{cases}$$

Формулы Френе

$x_1, \ldots, x_{n-2}$ высшие кривизны

$\dot r(s)$, $|\dot r(s)| = 1$ т.к. s — нат. пар-р

$\Rightarrow$ $g_1 = \dot r(s)$, аналогично

$g_2 = \dfrac{\ddot r}{|k|}$, поэтому $(**) \Rightarrow k = x_0$

$n=2$ $\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

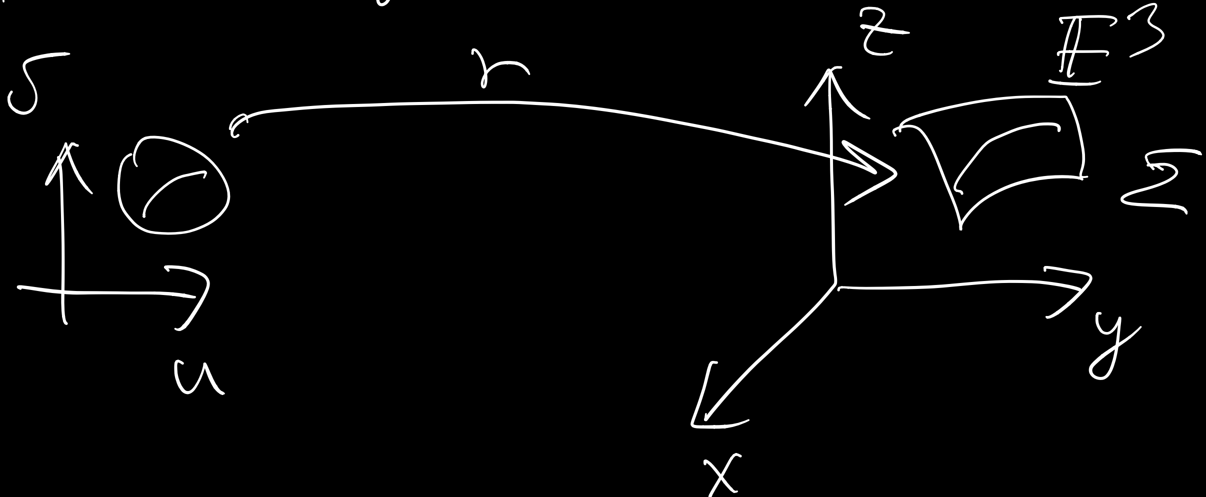
$n=3$ $\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & x \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix}$

Двумерные поверхности в трёхмерном пространстве

$k=0 \Rightarrow$ это прямая

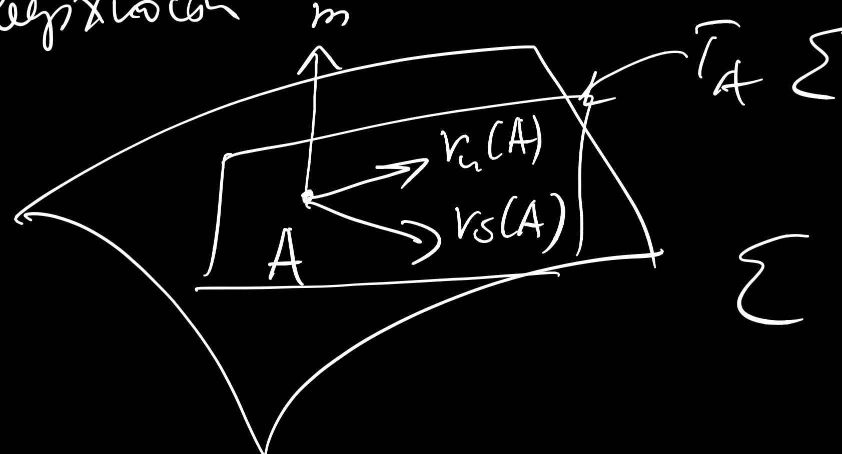
на сфере не лежат прямые $\Rightarrow$ геометрия сферы запрещает кривым на сфере иметь нулевую кривизну

Геометрия поверхности накладывает ограничения на возможные кривизны кривых, лежащих на этой поверхности.



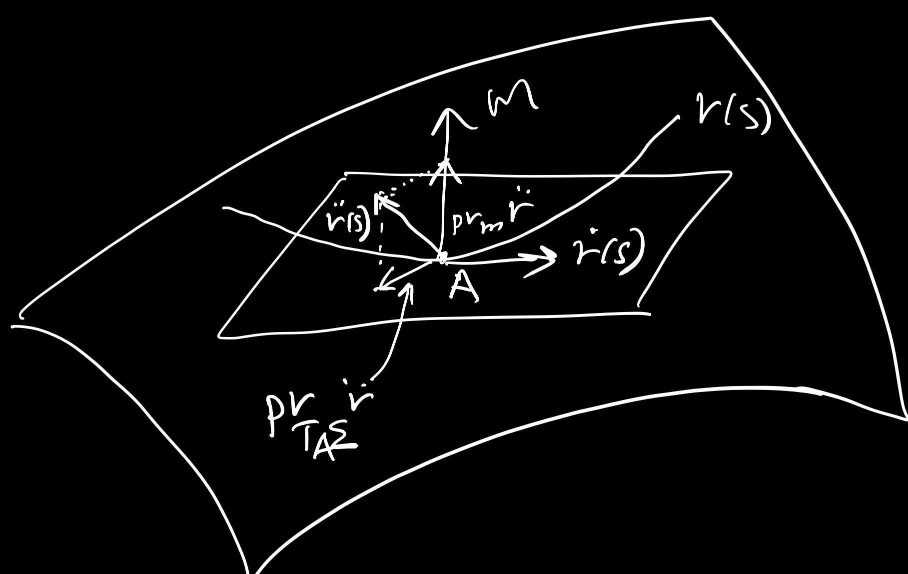
1) r гладкое
2) r регулярное, т.е. $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} -\frac{\partial r}{\partial u}- \\ -\frac{\partial r}{\partial v}- \end{pmatrix} = 2$

$r(u(s), v(s))$ произвольная кривая на поверхности



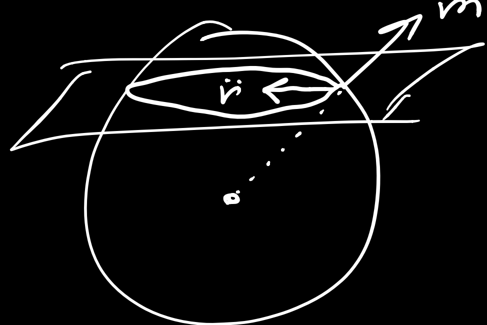
$m(A)$ нормаль к Σ в точке A

$|m|=1$, $m \perp T_A \Sigma$.



s – натуральный параметр на $r(s)=r(u(s), v(s))$

в общем случае $\ddot{r} \nparallel m$, пример:



$\ddot r \parallel m$

$$\ddot r = pr_m \ddot r + pr_{T_A\Sigma} \ddot r$$

Опр

$k_n = |pr_m \ddot r|$ нормальная кривизна кривой

$k_g = |pr_{T_A\Sigma} \ddot r|$ геодезическая кривизна кривой

Утв $k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$

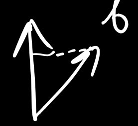
▷ Теорема Пифагора ◁

$$r(s) = r(u(s), v(s))$$

$$\dot r = r_u \cdot \dot u + r_v \cdot \dot v$$

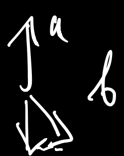
т.о. если в лок. к-тах u, v кривая имеет вид $(u(s), v(s))$, то её вектор скорости в базисе r_u, r_v имеет к-ты $(\dot u(s), \dot v(s))$

$$\ddot r = (r_{uu}\dot u + r_{uv}\dot v)\dot u + r_u \cdot \ddot u +$$
$$+ (r_{vu}\dot u + r_{vv}\dot v)\dot v + r_v \cdot \ddot v$$



$|pr_a b| = (a, b)$

$|a| = 1$



$|pr_a b| = -(a, b)$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \pm k_n = \langle \ddot r, n \rangle =$$
$$= \langle r_{uu}, n \rangle \dot u^2 + 2\langle r_{uv}, n \rangle \dot u \dot v + \langle r_{vv}, n \rangle \dot v^2$$

$L = \langle r_{uu}, n \rangle$

$M = \langle r_{uv}, n \rangle$

$N = \langle r_{vv}, n \rangle$

$$\pm k_n = L\dot u^2 + 2M\dot u\dot v + N\dot v^2 =$$
$$= (\dot u \ \dot v)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix}$$

Опр Вторая квадратичная форма — это квадратичная форма, которая в базисе r_u, r_v имеет матрицу $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

Утв Если s — натуральный параметр на лежащей на поверхности кривой, $\dot{} = \frac{d}{ds}$, то

$$\pm k_n = \mathrm{II}(\dot r, \dot r)$$

Опр Первая квадратичная форма — ограничение скалярного произведения в $\mathbb{E}^3$ на касательные плоскости

$$I_A = \langle\ ,\ \rangle\big|_{T_A\Sigma}$$

В базисе r_u, r_v первая квадратичная форма имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$ где

$E = \langle r_u, r_u\rangle$, $F = \langle r_u, r_v\rangle$, $G = \langle r_v, r_v\rangle$

I позволяет делать вычисление с длиной и углами в локальных к-тах.

<u>Пример</u>: Длина кривой

$$l = \int_a^b \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt$$

① в к-тах x, y, z объемлющего пр-ва

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t), \dot z(t))$$

$$\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\, dt$$

② в локальных к-тах u, v

$$\gamma(t) = (u(t), v(t))$$

$$\dot\gamma = (\dot u(t), \dot v(t))$$ в базисе r_u, r_v

$$\langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle = \mathrm{I}(\dot\gamma, \dot\gamma) = (\dot u\ \dot v)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{(\dot u\ \dot v)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix}}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2}\, dt$$

---

s - натуральный параметр

t - произвольный параметр

$$\pm k_n = \mathrm{II}\left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{II}\left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds}\right)}{1} = \frac{\mathrm{II}\left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds}\right)}{\underbrace{\mathrm{I}\left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds}\right)}_{\left|\frac{dr}{ds}\right|^2 = 1}} =$$

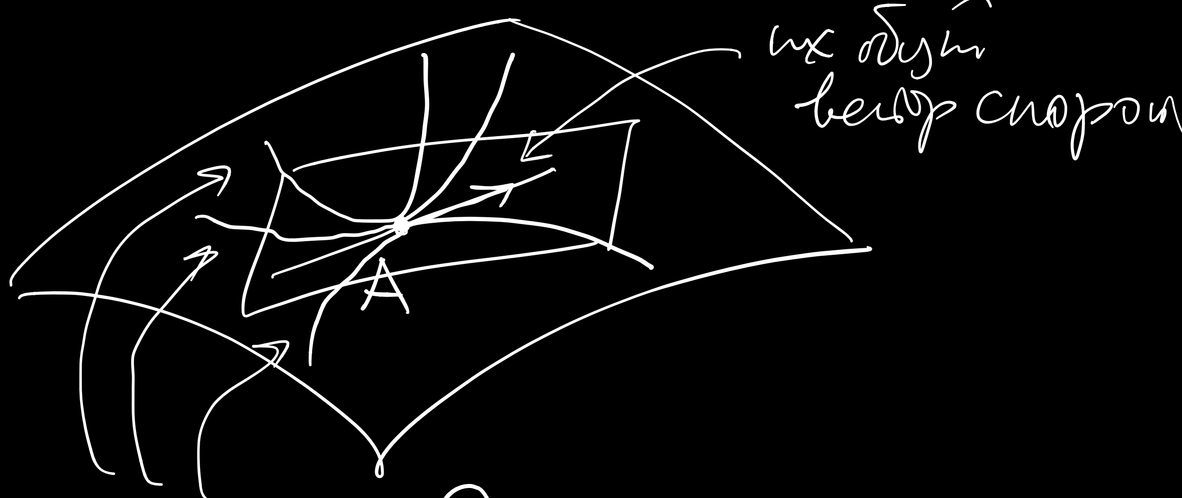
вектор, число

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{\cancel{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \, II\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right)}{\cancel{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \, I\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right)}$$

$\forall$ Для произвольного параметра t на кривой

$$\pm k_n = \frac{II\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right)}{I\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right)}$$



У этих кривых одна и та же нормальная кривизна в точке A

$$k=\sqrt{k_n^2+k_g^2} \geq k_n$$

среди этих кривых кривые с $k_g=0$

имеют минимальную кривизну.