Анализ на многообразиях

Лекция 5

$f:\Sigma\to\mathbb{R}$ гладкая

$$\partial_V f(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(A+\varepsilon V)-f(A)}{\varepsilon}$$

$A+\varepsilon V\notin\Sigma \Rightarrow f(A+\varepsilon V)$ не определена

<u>Напоминание:</u> $\exists F$, определенная в окрестности Σ, т.ч.

1) F гладкая
2) $F|_\Sigma = f$

<u>Замечание:</u> это продолжение F не единственно!

<u>Опр</u> $\partial_V f(A) := \underbrace{\partial_V F(A)}_{\text{определена}}$

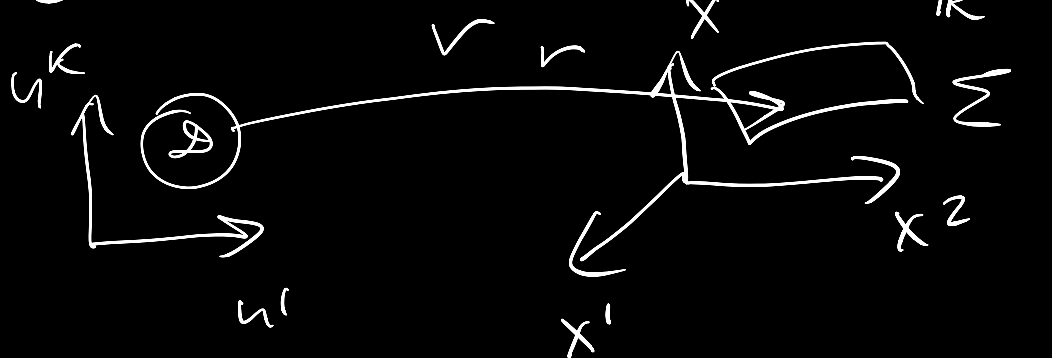
Надо д-ть, что это не зависит от выбора F

$V \in T_A \Sigma$ мы дифференцируем <u>только</u> вдоль касательных векторов к поверхности

$\Rightarrow \exists$ кривая γ на Σ т.что

1) $\forall t \quad \gamma(t) \in \Sigma$
2) $\gamma(0) = A$
3) $\dot\gamma(0) = V$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$$



$\gamma(t)$ в к-тах $x^1, .., x^n$:

$$\gamma(t) = (x^1(t), .., x^n(t))$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}}_{\text{не зависит от выбора } F} = \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} F(x^1(t), \dots, x^n(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x^i}(x^1(t), \dots, x^n(t))\, \dot{x}^i(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x^i}(A)\, V^i = \underbrace{\partial_V F(A)}_{} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ тоже не зависит от выбора F

$\partial_V f(A)$ определена корректно (для касательного вектора V!!!)

Можем определить понятие дифференцирования гладкой ф-ции на поверхности в точке.

$f : \Sigma \to \mathbb{R}$ C^∞ гладкая, на самом деле достаточно быть определенной в некоторой окрестности A.

$\mathcal{D}$ — дифференцирование <u>на Σ</u> в т. A, если

1) $\mathcal{D}f \in \mathbb{R}$
2) $\mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}f + \mathcal{D}g$

3) $\mathcal{D}(fg) = (\mathcal{D}f)\cdot g(A) + f(A)\,\mathcal{D}g)$

$u^1, .., u^k$ — локальные к-ты в окр-ти точки A

Ут. $\forall \mathcal{D}\ \exists\ V^1, .., V^k$, что

$$\mathcal{D}f = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)\, V^i$$

Касательный вектор $W \in T_A \Sigma$

$$W = W^i r_{u^i}(A)$$

можно рассмотреть путь $\gamma(t)$
в к-тах $u^1, .., u^k$, т.что

$\gamma(0) = A$

$\dot\gamma(0) = W$, т.е.

$A = (u^1_0, .., u^k_0)$ в $u^1, .., u^k$, то

$\gamma(t) = (u^1(t), .., u^k(t))$

$u^i(0) = u^i_0$

$\dot u^i(0) = W^i$

$$\partial_W f(A) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} f(u^1(t), \dots, u^k(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)\, w^i$$

Ут 1) каждый касательный вектор w задаёт дифференцирование $\partial_w\big|_A$

2) каждое дифференцирование в A получается из касательного вектора

$$w = w^i r_{u^i}(A)$$

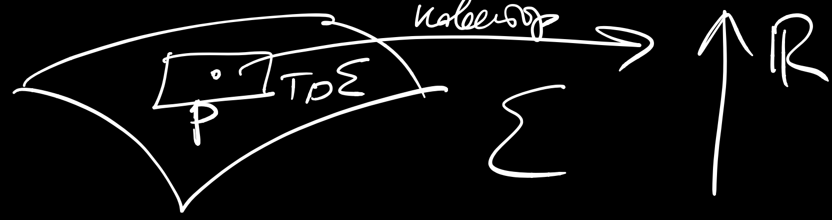
$\Updownarrow$ отождествим

$$\partial_w\big|_A = w^i \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_A$$

поэтому пишем просто

$$w = \partial_w = w^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

Касательные векторы $\Rightarrow$ его кососимметрические полилинейные ф-ции на них



$T_p\Sigma$ касательное пр-во к Σ в A

$T_p^*\Sigma := (T_p\Sigma)^*$ кокасательное пр-во к Σ в т. A

векторное поле X $\qquad X(p)\in T_p\Sigma$, $p \in \Sigma$

ковекторное поле ξ $\qquad \xi_p \in T_p^*\Sigma$

$\parallel$

1-форма

к/симм полилин. ф-ции на $T_p\Sigma$

если от q аргументов то это $\Lambda^q T_p^*\Sigma$

если поле таких объектов, то это

дифф. q-форма

$u^1,\dots,u^k$ лок. к-ты на Σ

$\frac{\partial}{\partial u^1}=r_{u^1},\dots,\frac{\partial}{\partial u^k}=r_{u^k}$ — базис в $T_p\Sigma$

$dx^1, \dots, dx^k$ — базис в $T_p^*\Sigma$

$dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_q}$ базис в $\Lambda^q T_p^*\Sigma$

$i_1<\dots<i_q$

Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей

Кривизна плоских кривых

$\gamma(t)$ параметризованная кривая

$\vec{F} = m\vec{a}$

$m=1 \qquad k=|\ddot{\gamma}(t)|$ при $v=1$

<u>Опр</u> Параметр t на кривой

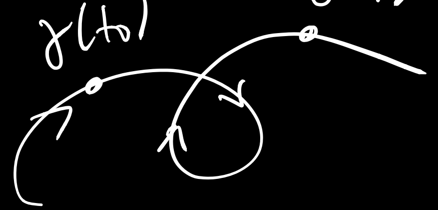
$\gamma(t) \subset \mathbb{E}^n$ называется натуральной, если $|\dot\gamma(t)| = 1$.

$\mathbb{E}^n = (\mathbb{A}^n, \langle\, ,\rangle)$

евклидово скалярное пр-ние

$x^1, \ldots, x^n$ ортонормальные декартовы систем к-т

$\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$



$l(t)$ - ориентированная длина γ от $\gamma(t_0)$ до $\gamma(t)$

$$l(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot\gamma(t)|\, dt$$

пусть кривая регулярная, тогда

$$\frac{dl}{dt} = |\dot\gamma(t)| \neq 0 \xRightarrow[\text{Теорема об обратной ф-ции}]{} \exists \text{ гладкая } t(l)$$

$\Rightarrow \gamma(t(\ell))$ параметризация кривой через ориентированную длину

Утв ℓ – натуральный параметр

$\triangleright \left|\frac{d\gamma}{d\ell}\right| = \Big|\underbrace{\frac{d\gamma}{dt}}_{\text{вектор}}\underbrace{\frac{dt}{d\ell}}_{\text{число}}\Big| =$

$= \left|\frac{dt}{d\ell}\right| \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = \frac{1}{\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|}\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = 1$ $\triangleleft$

Теорема об обратной ф-ции $\longrightarrow$ $\left|\frac{dt}{d\ell}\right| = \frac{1}{\left|\frac{d\ell}{dt}\right|}$

Утв Пусть s – натуральный параметр, а ℓ – ориентированная длина, и s и ℓ одинаково ориентируют кривую.

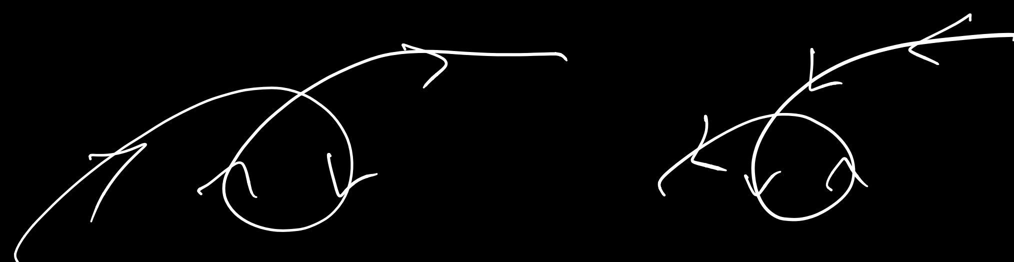
тогда $\ell - s = \mathrm{const}$

$\triangleright \; \ell(s) = \int_{s_0}^{s} \left|\frac{d\gamma}{ds}\right| ds =$

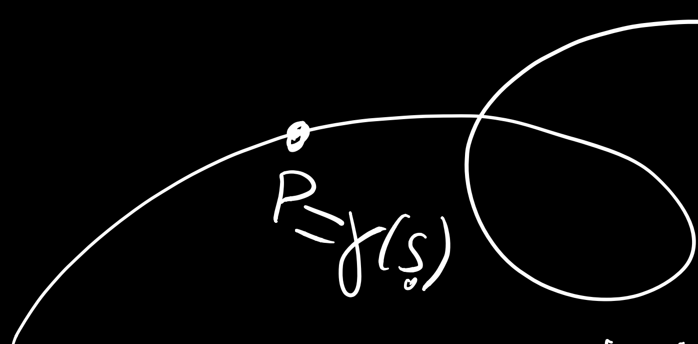
$\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1$ т.к. s – натуральный

$$= \int_{s_0}^{s} 1\,ds = s - s_0$$

$$l - s = -s_0 = \text{const}$$



<u>Опр</u> Кривизна кривой γ в евклидовом пр-ве равна длине в этой точке ускорения по отношению к натуральному параметру



$$k(P) = k(s_0) = |\ddot{\gamma}(s_0)|$$

Утв. Кривизна не зависит от выбора натурального параметра

▷ s, σ — натуральные параметры

$$\sigma = \pm s + \mathrm{const}$$

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{d}{d\sigma} = \pm\frac{d}{d\sigma}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} = \frac{d^2}{d\sigma^2} \quad \triangleleft$$

Примеры ① прямая

$$\gamma(t) = A + tv$$

$$\dot\gamma(t) = v$$

$$|\dot\gamma(t)| = |v|$$

$$\gamma(s) = A + s\frac{v}{|v|}$$ натуральная параметризация

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{v}{|v|} \qquad \frac{d^2\gamma}{ds^2} = 0$$

$\Rightarrow$ кривизна прямой 0

② окружность в плоскости

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = (-R\sin t, R\cos t)$$

$$\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = R$$

$$\gamma(s) = \left(R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}\right)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \left(-\frac{1}{\cancel{R}}\cancel{R}\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right)$$

$\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1 \Rightarrow s$ - натуральный параметр

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\right)$$

$$k = \left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right| = \frac{1}{R}$$

③ $\gamma(t)$

$$\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| \neq 1$$

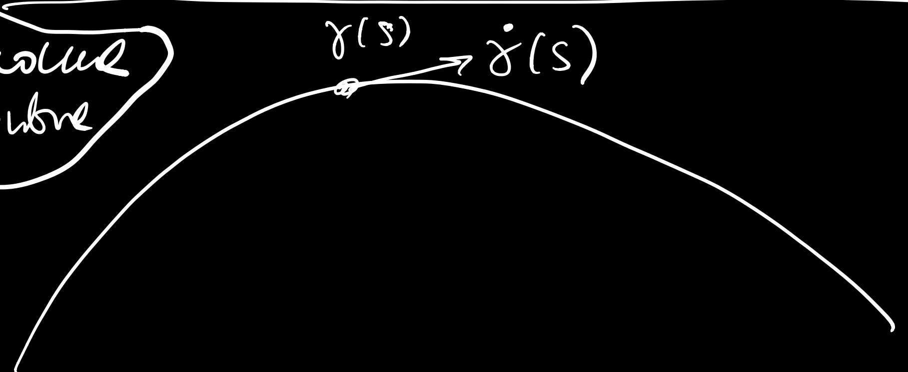
$$l(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\gamma}{dt}(t)\right| dt$$

1) взять интеграл

2) найти обратную функцию $t(l)$

$\gamma(t(l))$ натуральная параметризация

Плоские кривые



$v(s) = \dot{\gamma}(s)$ вектор скорости = касательный вектор

s – нат. параметр $\Rightarrow |v| = 1$

<u>Лемма</u> $\vec{a}(t)$ и $|\vec{a}(t)| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\vec a}(t) \perp \vec a(t)$

▶ $|\vec a(t)|=1 \Leftrightarrow \langle \vec a(t), \vec a(t)\rangle = 1$

продифф. по t

$$\langle \dot a(t), a(t)\rangle + \langle a(t), \dot a(t)\rangle = 0$$

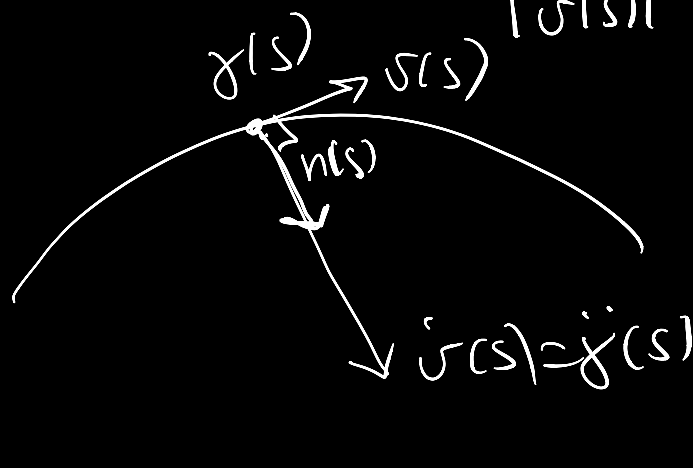
$$2\langle \dot a(t), a(t)\rangle = 0$$

$$\dot a(t) \perp a(t)$$ ◀

$$|v(s)|=1 \Rightarrow \dot v(s) = \ddot\gamma(s) \perp v(s)$$

если $k=|\ddot\gamma(s)|=|\dot v(s)|\neq 0$, то

введем $n(s)=\dfrac{\dot v(s)}{|\dot v(s)|}=\dfrac{\ddot\gamma(s)}{k(s)}$ вектор нормали



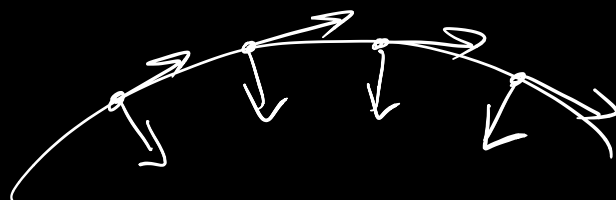
$|v|=1$

$|n|=1$

$v\perp n$

$v(s), n(s)$ ортонормированный базис

базис Френе (FRENET)



$\gamma(s);\ v(s), n(s)$ репер Френе

$\dot v(s) = k(s)\, n(s)$

$\dot n(s) = ?$

$|n(s)| = 1 \Rightarrow \dot n(s) \perp n(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot n(s) = \lambda(s)\, v(s)$

Теорема Френе

$$\begin{cases} \dot v(s) = k(s)\, n(s) \\ \dot n(s) = -k(s)\, v(s) \end{cases}$$

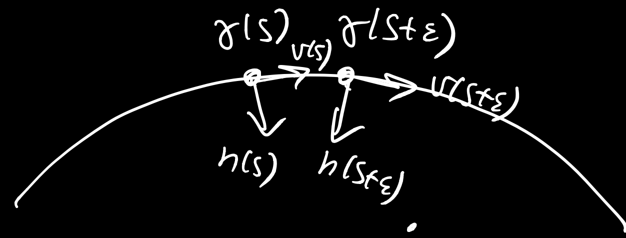
формулы Френе

$\langle v(s), n(s) \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \dot v(s), n(s) \rangle + \langle v(s), \dot n(s) \rangle = 0$

$\langle k(s) n(s), n(s) \rangle + \langle v(s), \lambda(s) v(s) \rangle = 0$

$k(s) + \lambda(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) = -k(s)$



$$f(s+\varepsilon) = f(s) + \varepsilon \dot f(s) + o(\varepsilon)$$

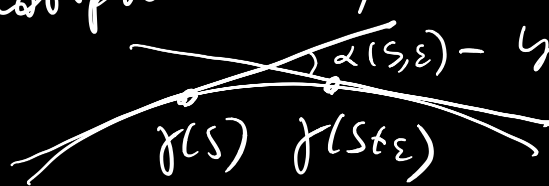
$$\begin{cases} v(s+\varepsilon) = v(s) + \varepsilon k(s) n(s) + o(\varepsilon) \\ n(s+\varepsilon) = n(s) - \varepsilon k(s) v(s) + o(\varepsilon) \end{cases}$$

$\sin\alpha = \alpha + o(\alpha)$, $\cos\alpha = 1 + o(\alpha)$

$$v(s+\varepsilon) = \cos(\varepsilon k(s))\, v(s) + \sin(\varepsilon k(s))\, n(s) + o(\varepsilon)$$

$$n(s+\varepsilon) = -\sin(\varepsilon k(s))\, v(s) + \cos(\varepsilon k(s))\, n(s) + o(\varepsilon)$$

поворот на угол $\varepsilon k(s)$ с точностью до $o(\varepsilon)$



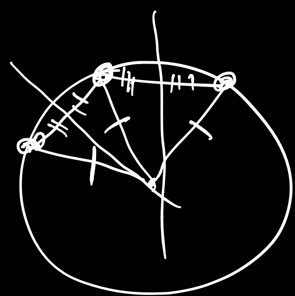
$\alpha(s,\varepsilon)$ — угол вращения касательной

$$\alpha(s,\varepsilon) = \varepsilon k(s) + o(\varepsilon)$$

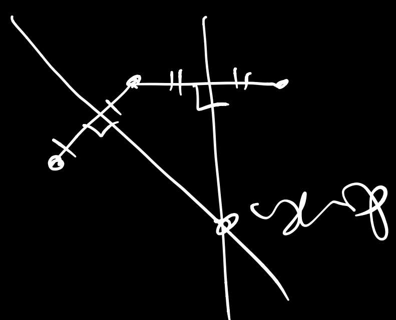
Утв. $k(s) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\alpha(s,\varepsilon)}{\varepsilon} = \dfrac{d}{d\varepsilon}\alpha(s,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$

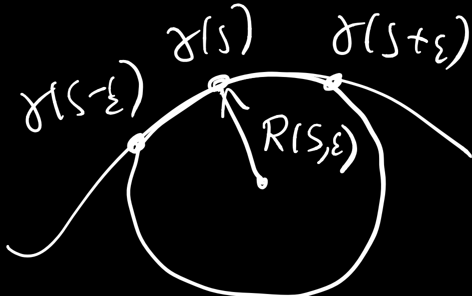
кривизна плоской кривой — угловая скорость вращения касательной

Третий способ определить кривизну плоской кривой



Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная окружность





$$\lim_{\varepsilon \to 0} R(s,\varepsilon)$$