27.10.2020
Лекция 8

Производный функтор

Сегодня мы определим производный функтор на производных категориях от аддитивного функтора между абелевыми категориями, а также функторы $R\operatorname{Hom}$ на $\otimes^L$ производных категориях.

Аналогично h-проективным комплексам, определяются h-инъективные: комплекс I над абелевой категорией $\mathcal{A}$ *h-инъективен*, если $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, I) = 0$ для любого ацикличного комплекса X. Их свойства двойственны свойствам h-проективных комплексов:

- $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(s, I)$ — изоморфизм для любого квазиизоморфизма s и h-инъективного I.
- $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, I) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, I)$ для любого X и h-инъективного I.
- Естественный функтор $hInj(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ строго полон.
- Ограниченный слева комплекс инъективных объектов в $\mathcal{A}$ h-инъективен.
- Если в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов, то у любого ограниченного слева комплекса X есть инъективная резольвента: квазиизоморфизм $X \to I(X)$ в ограниченный слева комплекс инъективных объектов.
- Для категории модулей над кольцом у любого комплекса X есть h-инъективная резольвента: квазиизоморфизм $X \to I(X)$ в h-инъективный комплекс.

Подкатегории h-проективных, ацикличных и h-инъективных комплексов в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ мы обозначаем через $hProj(\mathcal{A}), Acycl(\mathcal{A}), hInj(\mathcal{A})$ соответственно.

Будем сегодня предполагать и говорить, что абелева категория $\mathcal{A}$ *хорошая*, если у любого комплекса над $\mathcal{A}$ есть h-проективная и h-инъективная резольвенты.

Пусть дан аддитивный фунткто $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между абелевыми категориями. Его почленное применение даёт функторы $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}(\mathcal{B})$, которые также обозначим F. Однако на производные категории функтор F, вообще говоря, не локализуется. Несложно видеть, что функтор $F\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathcal{C}(\mathcal{B}) \arrow[d] \\
\mathcal{H}(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathcal{H}(\mathcal{B}) \arrow[d] \\
\mathcal{D}(\mathcal{A}) \arrow[r, dashed, "F"] & \mathcal{D}(\mathcal{B}),
\end{tikzcd}$$

существует тогда и только тогда, когда F точен. Если же F не точен (как это обычно бывает), то приходится строить приближения к нему.

Определение 1. Пусть $F\colon T_1 \to T_2$ — функтор, S — класс морфизмов в T_1, $q\colon T_1 \to T_1[S^{-1}]$ — локализация. *Левой локализацией* F относительно S называется функтор

$$LF\colon T_1[S^{-1}] \to F$$

вместе с морфизмом функторов $\lambda\colon LF \circ q \to F$, для которых выполнено следующее: для любого функтора $G\colon T_1[S^{-1}] \to F$ и морфизма функторов $\lambda'\colon G \circ q \to F$ существует единственный такой морфизм функторов $\phi\colon G \to LF$, что $\lambda' = \lambda \circ (\phi q)$.

Двойственным образом определяется правая локализация.

Если F — точный функтор между триангулированными категориями и для S выполнены условия Оре и согласованности с триангуляцией, то LF и G в данном определении должны быть точными.

Определение 2. Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между абелевыми категориями. *Левым (правым) производным функтором* $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ от F называется левая локализация LF (соотв. правая локализация RF) функтора $q \circ F\colon \mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ относительно квазиизоморфизмов.

Определение гарантирует, что производный функтор единствен, но ничего не говорит о его существовании. Однако для хорошей абелевой категории левый и правый производные функторы существуют.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{A}$ — хорошая абелева категория, а $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор. Обозначим через $\alpha\colon hProj(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ эквивалентность, пусть $\alpha^{-1}\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to hProj(\mathcal{A})$ — обратный функтор. Тогда композиция $q \circ F \circ \alpha^{-1}\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ — левый производный функтор от F. Аналогично, пусть $\beta^{-1}\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to hInj(\mathcal{A})$ — обратный функтор к эквивалентности $hInj(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда композиция $q \circ F \circ \beta^{-1}\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ — правый производный функтор от F.*

Мы не будем доказывать это предложение, хотя это и не сложно. Вместо этого сформулируем более явно конструкцию производных функторов, которая из него вытекает.

Пусть $M \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ — комплекс, $P(M) \to M$ и $M \to I(M)$ его h-проективная и h-инъективная резольвенты. Тогда

$$LF(M) = F(P(M)), \quad RF(M) = F(I(M)).$$

Действие производных функторов на морфизмах определяется, исходя из того, что любой морфизм в производной категории единственным по модулю гомотопии образом поднимается до морфизма комплексов между резольвентами.

Также заметим, что $LF(D^-(\mathcal{A})) \subset D^-(\mathcal{B})$ и $RF(D^+(\mathcal{A})) \subset D^+(\mathcal{B})$. Однако производный функтор не обязательно сохраняет ограниченные комплексы.

До сих пор никаких предположений о функторе F не требовалось. Однако левый производный функтор интересно брать от точных справа функторов, и наоборот. В этих предположениях определяются классические производные функторы.

Определение 4. Пусть в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных и инъективных объектов, а функтор $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен справа. *Классические левые производные функторы* $L_iF\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ определяются формулой

$$L_iF(M) := H^{-i}(LF(M)), M \in \mathcal{A}.$$

Если же F точен слева, то *классические правые производные функторы* $R^iF\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ определяются формулой

$$R^iF(M) := H^i(RF(M)), M \in \mathcal{A}.$$

Несложно проверить следующие свойства:

Предложение 5. *Для точного справа функтора $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ имеем*

1. *$L_iF = 0$ при $i < 0$, $L_0F \cong F$.*

2. *для любой точной последовательности* $0 \to M \to N \to K \to 0$ *в* $\mathcal{A}$ *имеем длинную точную последовательность в* $\mathcal{B}$*:*

$$\ldots \to L_2F(K) \to L_1F(M) \to L_1F(N) \to L_1F(K) \to F(M) \to F(N) \to F(K) \to 0.$$

Для точного слева функтора $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *имеем*

1. $R^iF = 0$ *при* $i < 0$, $R^0F \cong F$.

2. *для любой точной последовательности* $0 \to M \to N \to K \to 0$ *в* $\mathcal{A}$ *имеем длинную точную последовательность в* $\mathcal{B}$*:*

$$0 \to F(M) \to F(N) \to F(K) \to R^1F(M) \to R^1F(N) \to R^1F(K) \to R^2F(M) \to \ldots$$

Перейдём к примерам.

Для любой хорошей $\mathcal{A}$ и объекта $M \in \mathcal{A}$ рассмотрим точный слева функтор

$$\mathrm{Hom}(M, -)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}b.$$

Правый производный от него функтор обозначается

$$R\,\mathrm{Hom}(M, -)\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b),$$

явно он определяется так: $R\,\mathrm{Hom}(M, N) = \mathrm{Hom}(M, I(N))$, где $I(N)$ — h-инъективная резольвента N. Также для $N \in \mathcal{A}$ рассмотрим точный слева функтор

$$\mathrm{Hom}(-, N)\colon \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{A}b$$

(он точный справа как функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{A}b^{op}$). Правый производный от него функтор также обозначается

$$R\,\mathrm{Hom}(-, N)\colon \mathcal{D}(\mathcal{A})^{op} = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{op}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b),$$

явно он определяется так: $R\,\mathrm{Hom}(M, N) = \mathrm{Hom}(P(M), N)$, где $P(M)$ — h-проективная резольвента M.

Замечание 6. Чтобы говорить про двойственную категорию T^{op} к триангулированной T, полезно понимать, что она также триангулированна. А именно, сдвиг $[1]_{T^{op}}$ в T^{op} есть $[-1]_T$. Любой треугольник $X \to Y \to Z \to X[1]_T$ в T — это треугольник $X \leftarrow Y \leftarrow Z \leftarrow X[-1]_{T^{op}}$ в T^{op}. При этом выделенными в T^{op} считаются ровно те треугольники, которые выделены в T.

Для кольца A расмотрим функтор тензорного умножения над A:

$$\mathrm{Mod}{-}A \times A{-}\mathrm{Mod} \to \mathcal{A}b, \quad M, N \mapsto M \otimes_A N.$$

Он точен справа по обоим аргументам. Определены левые производные функторы от тензорного умножения:

$$M \otimes^L_A -\colon \mathcal{D}(A{-}\mathrm{Mod}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b), \quad - \otimes^L_A N\colon \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A) \to \mathcal{A}b,$$

они вычисляются с помощью замены аргумента на его h-проективную резольвенту.

Мы определили $R\,\mathrm{Hom}(M, N)$ в случае, когда M — объект в $\mathcal{A}$, а N — комплекс над $\mathcal{A}$, а также, когда N — объект в $\mathcal{A}$, а M — комплекс над $\mathcal{A}$. При этом для $M, N \in \mathcal{A}$ выражение

$R\operatorname{Hom}(M,N)$ у нас определено двумя разными способами — как производный функтор по первому и по второму аргументу. Можно показать, что оба дают квазиизоморфные комплексы, и мы сделаем это позже и в более общем случае — когда и M, и N будут комплексами.

Напомним определение комплекса морфизмов. Пусть M, N — комплексы над абелевой категорией $\mathcal{A}$. Положим

$$\underline{\operatorname{Hom}}(M,N)^n := \prod_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(M^i, N^{i+n}), \quad d(f) = d_N \circ f - (-1)^n f \circ d_M \quad \text{для} \quad f = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \underline{\operatorname{Hom}}(M,N)^n.$$

Получаем комплекс $\underline{\operatorname{Hom}}(M,N)$ абелевых групп.

Определим умножение

$$\underline{\operatorname{Hom}}^n(M,N) \times \underline{\operatorname{Hom}}^m(N,K) \to \underline{\operatorname{Hom}}^{n+m}(M,K)$$

правилом $(g\cdot f)^i := g^{i+n} f^i$ для $f \in \underline{\operatorname{Hom}}^n(M,N), g \in \underline{\operatorname{Hom}}^m(N,K)$.

Задача 1. Проверьте, что введённое умножение удовлетворяет градуированному правилу Лейбница:

$$d(g\cdot f) = d(g)\cdot f + (-1)^m g\cdot d(f).$$

Теперь для комплекса $M \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ определим функтор $\underline{\operatorname{Hom}}(M,-)\colon \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{A}b)$. Комплекс N он переводит в $\underline{\operatorname{Hom}}(M,N)$, а морфизм комплексов $f\colon N_1 \to N_2$ — в морфизм $\underline{\operatorname{Hom}}(M,N_1) \to \underline{\operatorname{Hom}}(M,N_2)$, который задаётся набором отображений

$$\underline{\operatorname{Hom}}^i(M,N_1) \to \underline{\operatorname{Hom}}^i(M,N_2)\colon g \mapsto f\cdot g,$$

где мы рассматриваем f как элемент (и даже цикл!) в $\underline{\operatorname{Hom}}^0(N_1,N_2)$.

Аналогично определяется функтор $\underline{\operatorname{Hom}}(-,M)\colon \mathcal{C}(\mathcal{A})^{op} \to \mathcal{C}(\mathcal{A}b)$.

Предложение 7. *Корректно определён функтор* $\underline{\operatorname{Hom}}(M,-)\colon \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{A}b)$, *который пропускается через функтор* $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}(\mathcal{A}b)$. *Этот последний функтор точен.*

Аналогичное верно для $\underline{\operatorname{Hom}}(-,M)$.

Доказательство. Корректность следует из задачи 1. Точность $\underline{\operatorname{Hom}}(M,-)\colon \mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}(Ab)$ следует из того, что $\underline{\operatorname{Hom}}(M,C(f)) \cong C(\underline{\operatorname{Hom}}(M,f))$ для любого морфизма комплексов $f\colon N_1 \to N_2$. □

Теперь можно определить $R\,\underline{\operatorname{Hom}}$ на производной категории.

Определение 8. Для хорошей абелевой категории $\mathcal{A}$ и $M,N \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ определим $R\,\underline{\operatorname{Hom}}(M,-)$ как правую локализацию от функтора $q\circ\underline{\operatorname{Hom}}(M,-)\colon \mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b)$. Определим $R\,\underline{\operatorname{Hom}}(-,N)$ как правую локализацию от функтора $q \circ \underline{\operatorname{Hom}}(-,N)\colon \mathcal{H}(\mathcal{A})^{op} \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b)$.

Предложение 9. *Для любых* $M,N \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ *определённые выше двумя способами* $R\,\underline{\operatorname{Hom}}(M,N)$ *квазиизоморфны. Соответствие* $(M,N) \mapsto R\,\underline{\operatorname{Hom}}(M,N)$ *задаёт функтор*

$$R\,\underline{\operatorname{Hom}}(-,-)\colon \mathcal{D}(\mathcal{A})^{op} \times \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b),$$

точный по обоим аргументам.

Доказательство. Пусть $P(M) \to M$ и $N \to I(N)$ — h-проективная и h-инъективная резольвенты соответственно. Тогда два определения $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)$ дают комплексы $\underline{\mathrm{Hom}}(P(M),N)$ и $\underline{\mathrm{Hom}}(M,I(N))$. Покажем, что оба они квазиизоморфны комплексу $\underline{\mathrm{Hom}}(P(M),I(N))$. Для первого: пусть $C(s)$ — конус квазиизоморфизма $N \to I(N)$, он ацикличен. Рассмотрим стандартный треугольник $N \to I(N) \to C(s) \to N[1]$. Точный функтор $\underline{\mathrm{Hom}}(P(M),-)$ переводит его в выделенный треугольник

$$\underline{\mathrm{Hom}}(P(M),N) \to \underline{\mathrm{Hom}}(P(M),I(N)) \to \underline{\mathrm{Hom}}(P(M),C(s)) \to \underline{\mathrm{Hom}}(P(M),N)[1]$$

в $\mathcal{H}(\mathcal{A}b)$. При этом когомологии $\underline{\mathrm{Hom}}(P(M),C(s))$ нулевые:

$$H^i(\underline{\mathrm{Hom}}(P(M),C(s))) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(P(M),C(s)[i]) = 0,$$

т.к. $P(M)$ h-проективный и $C(s)[i]$ ацикличный. Значит, по свойству выделенных треугольников морфизм $\underline{\mathrm{Hom}}(P(M),N) \to \underline{\mathrm{Hom}}(P(M),I(N))$ — квазиизоморфизм. Квазиизоморфность $\underline{\mathrm{Hom}}(P(M),I(N))$ и $\underline{\mathrm{Hom}}(M,I(N))$ проверяется аналогично.

Функториальность $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(-,-)$ по двум аргументам в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ следует из выражения $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) = \underline{\mathrm{Hom}}(P(M),I(N))$ и существования функторов $M \mapsto P(M)\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to hProj(\mathcal{A})$ и $N \mapsto I(N)\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to hInj(\mathcal{A})$. □

Отметим важное свойство, по сути использовавшееся в доказательстве:

Предложение 10. *Для любых комплексов над $\mathcal{A}$ имеем*

$$H^i(R\,\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)) \cong \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M,N).$$

Доказательство.

$$H^i(R\,\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)) \cong H^i(\underline{\mathrm{Hom}}(P(M),N)) \cong \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(P(M),N) \cong \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M,N).$$

□

Теперь обратимся к тензорному умножению и определим производный функтор $M \otimes^L_A N$ от аргументов $M \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$ и $N \in \mathcal{D}(A{-}\mathrm{Mod})$.

Определение 11. Пусть A — кольцо, $M \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A)$ и $N \in \mathcal{C}(A{-}\mathrm{Mod})$ — комплексы. Определим комплекс $M \otimes_A N$ равенствами

$$(M \otimes_A N)^n := \oplus_{i+j=n} M^i \otimes_A N^j, \quad d_{M\otimes_A N}(m \otimes n) := d_M(m) \otimes n + (-1)^{\deg m} m \otimes d_N(n).$$

Можно проверить, что получится комплекс и что справедливо

Предложение 12. *Для $M \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A)$ корректно определён функтор $M \otimes_A -\colon \mathcal{C}(A{-}\mathrm{Mod}) \to \mathcal{C}(\mathcal{A}b)$, который пропускается через функтор $\mathcal{H}(A{-}\mathrm{Mod}) \to \mathcal{H}(\mathcal{A}b)$. Этот последний функтор точен. Аналогичное верно для $- \otimes_A N$, где $N \in \mathcal{C}(A{-}\mathrm{Mod})$.*

Теперь можно определить производное тензорное произведение комплексов.

Определение 13. Для кольца A и $M \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A)$ определим $M \otimes^L_A -$ как левую локализацию от функтора $q \circ (M \otimes_A -)\colon \mathcal{H}(A{-}\mathrm{Mod}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b)$. Определим $- \otimes^L_A N$ для $N \in \mathcal{C}(A{-}\mathrm{Mod})$ как левую локализацию от функтора $q \circ (- \otimes_A N)\colon \mathcal{H}(\mathrm{Mod}{-}A) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b)$.

Предложение 14. *Для любых $M \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A)$, $N \in \mathcal{C}(A{-}\mathrm{Mod})$ определённые выше двумя способами $M \otimes^L_A N$ квазиизоморфны. Соответствие $(M,N) \mapsto M \otimes^L_A N$ задаёт функтор $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A) \times \mathcal{D}(A{-}\mathrm{Mod}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b)$, точный по обоим аргументам.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 9, ключевую роль будет играть следующий факт:

Лемма 15. *Тензорное произведение h-проективного комплекса $M \in hProj(\mathrm{Mod}{-}A)$ и ацикличного комплекса $N \in Acycl(A{-}\mathrm{Mod})$ ациклично.*

Доказать эту лемму напрямую может быть трудно, мы получим простое изящное доказательство, основанное на сопряжённости тензорного произведения и $\underline{\mathrm{Hom}}$.

Лемма 16. *Пусть A и C — кольца, $M \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A)$, $K \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}C)$, $N \in \mathcal{C}(A{-}\mathrm{Mod}{-}C)$. Тогда имеем изоморфизм в $\mathcal{C}(\mathcal{A}b)$, функториальный по M, N, K:*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_C(M \otimes_A N, K) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(M, \underline{\mathrm{Hom}}_C(N, K)).$$

Задача 2. Докажите это.

Следствие 17. *В предположениях леммы 16 имеем изоморфизмы*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathrm{Mod}-C)}(M \otimes_A N, K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathrm{Mod}-A)}(M, \underline{\mathrm{Hom}}_C(N, K)),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Mod}-C)}(M \otimes_A N, K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Mod}-A)}(M, \underline{\mathrm{Hom}}_C(N, K)).$$

В частности, функтор $- \otimes_A N \colon \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A) \to \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}C)$ сопряжён слева к функтору $\underline{\mathrm{Hom}}_C(N, -) \colon \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}C) \to \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A)$, аналогично для гомотопической категории.

Доказательство. Рассмотреть циклы и когомологии в изоморфизме из леммы 16. □

Лемма 18. *Пусть $\mathcal{A}$ — хорошая абелева категория, $X \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ — комплекс. Пусть $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(P, X) = 0$ для всех h-проективных P (соотв. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, I) = 0$ для всех h-инъективных I). Тогда X ацикличен.*

Доказательство. Рассмотреть h-проективную резольвенту $P \to X$ — на когомологиях это и ноль, и изоморфизм. □

Доказательство леммы 15. Согласно лемме 18, достаточно показать, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A}b)}(M \otimes_A N, I) = 0$ для любого h-инъективного комплекса $I \in \mathcal{C}(\mathcal{A}b)$. По следствию 17 имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A}b)}(M \otimes_A N, I) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Mod}-A)}(M, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(N, I)) = 0.$$

Здесь второе равенство выполнено в силу того, что M h-проективен, а $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(N, I)$ ацикличен. Действительно, $H^i(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(N, I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A}b)}(N, I[i]) = 0$ так как N ацикличный, а $I[i]$ h-инъективный. □

Теперь можно доказать предложение 14, это делается так же, как с предложением 9.

Замечание 19. Классические производные фунторы от Hom:

$$R^i \mathrm{Hom}(M, N) := H^i(R\,\mathrm{Hom}(M, N)),$$

где $M, N \in \mathcal{A}$, суть не что иное, как функторы $\mathrm{Ext}^i(M, N)$. Это видно из того, что $H^i(R\,\mathrm{Hom}(M, N)) \cong H^i(\mathrm{Hom}(P(M), N)) \cong \mathrm{Ext}^i(M, N)$.

Определение 20. Классические производные функторы от $\otimes$ называются Tor:

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) := H^{-i}(M \otimes_A^L N),$$

где $M \in \mathrm{Mod}{-}A$, $N \in A{-}\mathrm{Mod}$.

Наконец, проверим, что $\otimes^L$ и $R\,\underline{\mathrm{Hom}}$ и сопряжены как функторы между производными категориями.

Предложение 21. *Пусть A и C — кольца, $M \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A)$, $K \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}C)$, $N \in \mathcal{C}(A{-}\mathrm{Mod}{-}C)$. Тогда имеем квазиизоморфизм в $\mathcal{C}(\mathcal{A}b)$, функториальный по M, N, K:*

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}_C(M \otimes^L_A N, K) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, R\,\underline{\mathrm{Hom}}_C(N, K)).$$

Доказательство. Выберем h-проективную $P(M) \to M$ и h-инъективную $K \to I(K)$ резольвенты. Имеем

$$\begin{aligned} R\,\underline{\mathrm{Hom}}_C(M \otimes^L_A N, K) &\cong \underline{\mathrm{Hom}}_C(P(M) \otimes_A N, I(K)) \cong \\ &\cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(P(M), \underline{\mathrm{Hom}}_C(N, I(K))) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, R\,\underline{\mathrm{Hom}}_C(N, K)), \end{aligned}$$

где второй изоморфизм из леммы 16, а первый и третий из явной конструкции производных фунторов. □

Следствие 22. *В обозначениях предложения 21 имеем квазиизоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-C)}(M \otimes^L_A N, K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(M, R\,\underline{\mathrm{Hom}}_C(N, K)).$$

В частности, функтор $- \otimes^L_A N \colon \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}C)$ сопряжён слева к функтору $R\,\underline{\mathrm{Hom}}_C(N, -) \colon \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}C) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$.

Доказательство. Рассмотреть нулевые когомологии в изоморфизме из предложения 21, использовать предложение 10. □

Перейдём к производной Морита-эквивалентности, одной из важнейших тем курса.

Напомним, что кольца называются Морита-эквивалентными, если категории модулей над ними аддитивно эквивалентны. Имеет место теорема Мориты:

Теорема 23. *Следующие условия на кольца A и B равносильны:*

1. *категории $\mathrm{Mod}{-}A$ и $\mathrm{Mod}{-}B$ аддитивно эквивалентны;*
2. *категории $\mathrm{mod}{-}A$ и $\mathrm{mod}{-}B$ аддитивно эквивалентны;*
3. *существует проективный генератор P в $\mathrm{mod}{-}B$, для которого $\mathrm{End}_B P \cong A$.*

Аналогичные условия существуют и для эквивалентностей производной категории модулей. Чтобы их сформулировать, понадобится понятие классического генератора триангулированной категории.

Определение 24. Пусть T — триангулированная категория, $G \in T$. Через $\langle G \rangle$ обозначается наименьшая толстая подкатегория в T, содержащая G. Объект G называется *классическим генератором* категории T, если $\langle G \rangle = T$.

Теорема 25 (J.Rickard, 1989)**.** *Следующие условия на кольца A и B равносильны:*

1. *категории $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$ и $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}B)$ аддитивно эквивалентны;*
2. *категории $\mathrm{Perf}(A)$ и $\mathrm{Perf}(B)$ аддитивно эквивалентны;*
3. *существует классический генератор G в $\mathrm{Perf}(B)$, для которого $\mathrm{End}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-B)} G \cong A$ и $\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-B)}(G, G) = 0$ для $i \neq 0$.*

Доказательство. Следствие (1) $\Longrightarrow$ (2) вытекает из замечательного категорного описания совершенных комплексов (которое мы доказывать не будем:):

Теорема 26. *Пусть A — кольцо. Тогда $\mathrm{Perf}(A) \subset \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$ — в точности подкатегория компактных объектов в $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$.*

Следствие (2) $\Longrightarrow$ (3) простое. Действительно, A в $\mathrm{Perf}(A)$ является классическим генератором (было доказано на одной из прошлых лекций в случае нётерова кольца, но нужное вложение $\mathrm{Perf}(A) \subset \langle A \rangle$ очевидно), а равенства следуют из общего факта: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(A, M) \cong H^0(M)$ для любого комплекса A-модулей M.

Самое интересное — следствие (3) $\Longrightarrow$ (1). Его несложно доказать аналогично теореме Мориты по модулю следующей (казалось бы, невинной) леммы.

Лемма 27. *В предположениях условия (3) функтор $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(G, -)\colon \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}B) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}b)$ пропускается через точный функтор $\Phi\colon \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}B) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$, причём $\Phi(G) \cong A$.*

Допустим, лемма 27 известна. Покажем, что Φ — строго полный функтор. То есть, для любых $M, N \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}B)$ индуцированное отображение

$$\Phi_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-B)}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(\Phi(M), \Phi(N))$$

— изоморфизм. Во-первых, $\Phi_{G,N}$ изоморфизм при всех N:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-B)}(G, N) \cong H^0(R\,\underline{\mathrm{Hom}}(G, N)) \cong H^0(\Phi(N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(A, \Phi(N)) \cong \\ \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(\Phi(G), \Phi(N)).\end{aligned}$$

Далее, рассмотрим подкатегорию

$$T := \{M \mid \Phi_{M,N} \text{ — изоморфизм при всех } N\} \subset \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}B).$$

Она содержит G, толстая и замкнута относительно любых прямых сумм (последнее — так как G компактен и потому Φ переводит прямые суммы в прямые суммы). Так как G — генератор $\mathrm{Perf}(B)$, получаем что $B \in \mathrm{Perf}(B) \subset T$.

Если бы мы доказывали (2), мы уже получили бы, что Φ строго полон. Нам же нужно использовать ещё одну полезную лемму. Её мы также не доказываем.

Лемма 28. *Пусть A — кольцо и $T \subset \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$ — строгая триангулированная подкатегория, замкнутая относительно произвольных прямых сумм и содержащая A. Тогда $T = \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$.*

Итак, $\Phi\colon \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}B) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$ строго полон. Он точен и коммутирует с прямыми суммами, кроме того, $\Phi(G) \cong A$. Значит, существенный образ Φ удовлетворяет условиям леммы 28, и потому есть вся категория $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$. □

Лемму 27 мы доказывать не будем. Сделать это в рамках тех понятий, что мы знаем, невозможно — нет никакого способа сделать члены комплекса $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(G, M)$ модулями над A. Для доказательства леммы 27 нужно использовать dg-алгебры, dg-модули и их производные категории. А именно, естественно строится функтор $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(G, -)$ из $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}B)$ в производную категорию dg-модулей над dg-алгеброй $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(G, G)$. В свою очередь, эта dg-алгебра квазиизоморфна своей когомологии, обычной алгебре A, и это влечёт эквивалентность производной категории dg-модулей над $R\,\underline{\mathrm{Hom}}(G, G)$ и $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$.

Однако мы можем доказать лемму 27 в важном частном случае — когда генератор G есть обычный модуль. Тогда в качестве Φ можно взять $R\,\mathrm{Hom}(G, -)$ — правый производный функтор от точного слева функтора $\mathrm{Hom}(G, -)\colon \mathrm{Mod}{-}B \to \mathrm{Mod}{-}A$. Условия $\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-B)}(G, G) = 0$ при $i \neq 0$ гарантируют, что $R\,\mathrm{Hom}(G, G) \cong \mathrm{Hom}_B(G, G) \cong A$.

Определение 29. Кольца A и B будем называть *производно Морита-эквивалентными*, если выполнены условия теоремы 25.