3.11.2020
Лекция 9

Полуортогональные разложения, исключительные наборы и перестройки

Сегодня снова обратимся к абстрактным триангулированным категориям.

Определение 1. Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ — подкатегория. Определим правый и левый ортогоналы к $\mathcal{A}$ как полные подкатегории в $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{A}^{\perp} := \{X \in \mathcal{T} \mid \operatorname{Hom}^i(A, X) = 0 \quad \text{для всех } i \in \mathbb{Z},\ A \in \mathcal{A}\},$$

$$^{\perp}\mathcal{A} := \{X \in \mathcal{T} \mid \operatorname{Hom}^i(X, A) = 0 \quad \text{для всех } i \in \mathbb{Z},\ A \in \mathcal{A}\},$$

это толстые триангулированные подкатегории в $\mathcal{T}$. Скажем, что подкатегории $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ полуортогональны, если $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^{\perp}$.

Определение 2. Для полуортогональных подкатегорий $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ обозначим через $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ наименьшую строгую полную триангулированную подкатегорию в $\mathcal{T}$, содержащую $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Если $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$, говорят, что $\mathcal{T}$ имеет полуортогональное разложение на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение. Тогда*

1. *Для любого $X \in \mathcal{T}$ существует выделенный треугольник*
$$X_B \to X \to X_A \to X_B[1], \tag{1}$$
где $X_A \in \mathcal{A}$, $X_B \in \mathcal{B}$.

2. *Треугольник* (1) *единствен для данного X и функториально зависит от X. Имеем функторы*
$$p_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{T} \to \mathcal{A}, \quad p_{\mathcal{A}}(X) = X_A,$$
$$p_{\mathcal{B}} \colon \mathcal{T} \to \mathcal{B}, \quad p_{\mathcal{B}}(X) = X_B.$$

3. *Функтор $p_{\mathcal{A}}$ сопряжён слева к функтору вложения $i_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{T}$, а функтор $p_{\mathcal{B}}$ сопряжён справа к функтору вложения $i_{\mathcal{B}} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{T}$.*

4. *Функторы $p_{\mathcal{A}}$ и $p_{\mathcal{B}}$ точные.*

Доказательство. (1) Это самое сложное утверждение. Обозначим через $\mathcal{T}'$ полную подкатегорию в $\mathcal{T}$, образованную такими X, для которых выделенный треугольник (1) существует. Очевидно, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$. Покажем, что $\mathcal{T}'$ триангулированна, отсюда будет следовать, что $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Для этого последовательно проверим (использую аксиому октаэдра), что конус морфизма $X \to Y$ лежит в $\mathcal{T}'$, если

1. $X \in \mathcal{T}, Y \in \mathcal{A}$,
2. $X \in \mathcal{T}, Y \in \mathcal{B}$,
3. $X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{T}$,
4. $X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{T}$,
5. $X \in \mathcal{T}, Y \in \mathcal{T}$.

(2) Покажем, что любой морфизм $f\colon X \to Y$ единственным образом продолжается до морфизма треугольников типа (1):

$$\begin{tikzcd}
X_B \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "f_B"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_A"] & X_B[1] \arrow[d, dashed, "f_B[1]"] \\
Y_B \arrow[r] & Y \arrow[r, "v"] & Y_A \arrow[r, "v"] & Y_B[1].
\end{tikzcd}$$

Действительно, $\mathrm{Hom}^i(X_B, Y_A) = 0$ при всех i, и длинная точная последовательность морфизмов из X_B в нижний треугольник влечёт, что fu единственным образом пропускается через Y_B. Аналогично vf единственным образом пропускается через X_A. А существование морфизма треугольников следует из существования f_B и аксиомы $TR3$.

Из доказанного следует, что любые два треугольника типа (1) для данного X изоморфны.

(3) Проверим первое. Надо показать, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, i_{\mathcal{A}}(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(p_{\mathcal{A}}(X), A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_A, A)$$

при всех $A \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{T}$. Это следует из длинной точной последовательности морфизмов в A из (1) и того, что $\mathrm{Hom}^i(X_B, A) = 0$ при всех i.

(4) Оставим слушателю как хорошее упражнение. $\square$

Задача 1. Закончите доказательство пункта (1) и докажите пункт (4).

Функторы $p_{\mathcal{A}}$ и $p_{\mathcal{B}}$ называют *функторами проекции* категории $\mathcal{T}$ на компоненты $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ относительно разложения $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$.

Определение 4. Подктегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ называется *допустимой слева* (соотв. *допустимой справа*), если функтор вложения $\mathcal{A} \to \mathcal{T}$ имеет левый (соотв. правый) сопряжённый. Подкатегория называется *допустимой*, если она допустима и слева, и справа.

Таким образом, левая компонента полуортогонального разложения допустима слева, а правая допустима справа. Верно и обратное.

Предложение 5. *Пусть триангулировнная подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ допустима слева (соотв. справа). Тогда имеет место полуортогональное разложение $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, {}^{\perp}\mathcal{A} \rangle$ (соотв. $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{A} \rangle$).*

Доказательство. Проверим первое. Пусть $X \in \mathcal{T}$, надо доказать, что существует треугольник типа (1) с $X_B \in {}^{\perp}\mathcal{A}$. Рассмотрим единицу сопряжения $e\colon X \to i_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{A}}(X)$. Для любого $A \in \mathcal{A}$ морфизм e индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(p_{\mathcal{A}}(X), A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(i_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{A}}(X), i_{\mathcal{A}}(A)) \xrightarrow{e} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, i_{\mathcal{A}}(A)).$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Hom}^i(C(e), i_{\mathcal{A}}(A)) = 0$ при всех i. Это значит, что $C(e) \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ и треугольник $C(e)[-1] \to X \to i_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{A}}(X) \to C(e)$ искомый. $\square$

Таким образом, задание допустимой слева или справа триангулированной подкатегории равносильно заданию полуортогонального разложения.

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ — триангулированные подкатегории и $\mathcal{A}$ допустима слева в $\mathcal{T}$. Тогда $\mathcal{A}$ допустима слева и в $\mathcal{T}'$. Имеются полуортогональные разложения*

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{A} \rangle, \quad \mathcal{T}' = \langle \mathcal{A}^{\perp, \mathcal{T}'}, \mathcal{A} \rangle,$$

где ${}^{\perp,\mathcal{T}'}\mathcal{A} = ({}^{\perp}\mathcal{A}) \cap \mathcal{T}'$ *— левый ортогонал к* $\mathcal{A}$ *внутри* $\mathcal{T}'$. *При этом функторы проекции на компоненты второго разложения суть ограничения на* $\mathcal{T}'$ *функторов проекции на компоненты первого разложения:*

$$p^{\mathcal{T}'}_{\mathcal{A}} = p^{\mathcal{T}}_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{T}'}, \quad p^{\mathcal{T}'}_{\perp,\mathcal{T}'\mathcal{A}} = p^{\mathcal{T}}_{\perp\mathcal{A}}|_{\mathcal{T}'}.$$

Аналогичное верно для допустимой справа подкатегории.

Доказательство. Доказать короче, чем сформулировать. Возьмём любой объект $X \in \mathcal{T}'$ и построим треугольник типа (1) в $\mathcal{T}$:

$$X_B \to X \to X_A \to X_B[1],$$

где $X_A \in \mathcal{A}$, $X_B \in^{\perp} \mathcal{A}$. При этом $X_B \in \mathcal{T}'$, так как $X, X_A \in \mathcal{T}'$. То есть, $X_B \in^{\perp,\mathcal{T}'} \mathcal{A}$. Значит, этот треугольник — типа (1) для подкатегории $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}'$ и ортогонала ${}^{\perp,\mathcal{T}'}\mathcal{A}$. Отсюда следует допустимость $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}'$ и равенства функторов. $\square$

Предложение 7. *Пусть* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ *— полуортогональные допустимые слева триангулированные подкатегории. Тогда подкатегория* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \subset \mathcal{T}$ *также допустима и*

$$p_{\perp\langle \mathcal{A},\mathcal{B}\rangle} \cong p_{\perp\mathcal{B}} p_{\perp\mathcal{A}}.$$

Аналогичное верно для допустимых справа подкатегорий.

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{T}$. Из допустимости $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ следует существование выделенных треугольников

$$X' \to X \to X_A \to X'[1], \quad X'' \to X' \to X_B \to X''[1],$$

где $X' \in^{\perp} \mathcal{A}$, $X_A \in \mathcal{A}$, $X'' \in^{\perp} \mathcal{B}$, $X_B \in \mathcal{B}$. При этом $\mathcal{B} \subset^{\perp} \mathcal{A}$, значит $X_B \in^{\perp} \mathcal{A}$ и следовательно $X'' \in^{\perp} \mathcal{A}$. Получаем, что $X'' \in^{\perp} \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. Покажем, что конус композиции $f\colon X'' \to X' \to X$ лежит в $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. Это следует из аксимомы октаэдра, которая говорит, что существует выделенный треугольник $X_B \to C(f) \to X_A \to X_B[1]$.

Таким образом, имеется выделенный треугольник типа (1)

$$X'' \xrightarrow{f} X \to C(f) \to X''[1],$$

где $C(f) \in \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ и $X'' \in^{\perp} \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. Получаем полуортогональное разложение

$$\mathcal{T} = \langle \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle, {}^{\perp}\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \rangle,$$

следовательно $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ допустима слева в $\mathcal{T}$.

Изоморфизм функторов следует из того, что

$$p_{\perp\langle \mathcal{A},\mathcal{B}\rangle}(X) = X'' = p_{\perp\mathcal{B}}(X') = p_{\perp\mathcal{B}}(p_{\perp\mathcal{A}}(X)).$$

$\square$

Теперь научимся перестраивать полуортогональные разложения. Пусть триангулированная подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ допустима. Это значит, что имеются полуортогональные разложения

$$\langle \mathcal{B}, \mathcal{A} \rangle = \mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle,$$

где $\mathcal{B} = A^{\perp}, \mathcal{C} =^{\perp} \mathcal{A}$.

Предложение 8. *В сделанных предположениях функторы*

$$p_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{B}} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}, \quad p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$$

суть взаимно обратные эквивалентности.

Доказательство. Проверим, что функтор $p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{C}} p_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{B}} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ изоморфен $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$. Пусть $\eta_{\mathcal{C}} \colon i_{\mathcal{C}} p_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$ и $\eta_{\mathcal{B}} \colon p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{B}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ — коединицы сопряжения. Морфизм $\eta_{\mathcal{B}}$ — изоморфизм, так как $i_{\mathcal{B}}$ строго полон. Рассмотрим морфизм функторов

$$p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{C}} p_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{B}} \xrightarrow{p_{\mathcal{B}} \eta_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{B}}} p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{B}}$$

и покажем, что он — изоморфизм. Для любого $X \in \mathcal{T}$ имеется выделенный трегольник типа (1):

$$i_{\mathcal{C}} p_{\mathcal{C}}(X) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{C}}(X)} X \to i_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{A}}(X) \to i_{\mathcal{C}} p_{\mathcal{C}}(X)[1].$$

Следовательно, имеется выделенный треугольник функторов

$$p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{C}} p_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{B}} \xrightarrow{p_{\mathcal{B}} \eta_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{B}}} p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{B}} \to p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{A}} p_{\mathcal{A}} i_{\mathcal{B}} \to p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{C}} p_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{B}}[1].$$

Заметим, что функтор $p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{A}}$ равен нулю (так как проекция $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ равна нулю). Следовательно, $p_{\mathcal{B}} \eta_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{B}}$ — изоморфизм.

Аналогично проверяется, что композиция $p_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{B}} p_{\mathcal{B}} i_{\mathcal{C}}$ изоморфна $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. □

Переход от полуортогонального разложения $\langle \mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{A} \rangle$ к разложению $\langle \mathcal{A}, {}^{\perp}\mathcal{A} \rangle$ называется *перестройкой*. Эквивалентности

$$L_{\mathcal{A}} = p_{\mathcal{A}^{\perp}} i_{{}^{\perp}\mathcal{A}} \colon {}^{\perp}\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\perp}, \quad R_{\mathcal{A}} = p_{{}^{\perp}\mathcal{A}} i_{\mathcal{A}^{\perp}} \colon \mathcal{A}^{\perp} \to {}^{\perp}\mathcal{A}$$

будем называть функторами левой и правой перестройки относительно $\mathcal{A}$ соответственно.

Таким образом, для любого объекта X, ортогонального слева к $\mathcal{A}$, определена его перестройка $L_{\mathcal{A}}(X) \in \mathcal{A}^{\perp}$, аналогично для объекта Y, ортогонального справа к $\mathcal{A}$, определена его перестройка $R_{\mathcal{A}}(X) \in {}^{\perp}\mathcal{A}$. Причём согласно предложению 6, эти перестройки не зависят от того, внутри какой категории их брать.

Можно рассматривать полуортогональные разложения на несколько компонент. Будем говорить, что

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle \tag{2}$$

— полуортогональное разложение, если подкатегории $\mathcal{A}_i$ триангулированны, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j^{\perp}$ при всех $i < j$ и $\mathcal{T}$ — наименьшая строгая полная подкатегория в $\mathcal{T}$, содержащая все $\mathcal{A}_i$. Из предложения 3 следует, что в этом случае для любого $X \in \mathcal{T}$ существует и единственна диаграмма

$$0 = X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to X_1 \to X_0 = X,$$

где $C(X_i \to X_{i-1}) \in \mathcal{A}_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

Если все компоненты разложения (2) допустимы, можно рассмотреть его перестройки. Для любого i можно заменить в (2) пару $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+1}$ на пару $L_{\mathcal{A}_i}(\mathcal{A}_{i+1}), \mathcal{A}_i$ или на пару $\mathcal{A}_{i+1}, R_{\mathcal{A}_{i+1}}(\mathcal{A}_i)$, получим новое полуортогональное разложение.

Пример 9. Пусть A — кольцо, $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}{-}\mathcal{A}$. Как мы раньше видели, имеются полуортогональные разложения

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \langle Acycl(\mathcal{A}), hProj(\mathcal{A})\rangle = \langle hInj(\mathcal{A}), Acycl(\mathcal{A})\rangle.$$

То есть, подкатегория $Acycl(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{A})$ допустима, а категории $hProj(\mathcal{A})$ и $hInj(\mathcal{A})$ получаются друг из друга перестройками. Обе они эквивалентны $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Более интересные примеры получаются из исключительных наборов.
Напомним

Определение 10. Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, линейная над полем k. Говорят, что $\mathcal{T}$ Hom-*конечна* (соотв. Ext-*конечна*), если для всех $X, Y \in \mathcal{T}$ пространство $\mathrm{Hom}(X,Y)$ (соотв. $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^i(X,Y)$) конечномерно над k.

Определение 11. Объект E в k-линейной триангулировнной категории $\mathcal{T}$ называется *исключительным*, если $\mathrm{Hom}(E,E) = \mathsf{k}$, $\mathrm{Hom}^i(E,E) = 0$ при всех $i \neq 0$.

Предложение 12. *Пусть E — исключительный объект в* Ext-*конечной триангулированной категории $\mathcal{T}$. Тогда*

1. $\langle E\rangle \cong D^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k})$;
2. *подкатегория $\langle E\rangle \subset \mathcal{T}$ допустима.*

Доказательство. (1) Почти очевидно: любой объект в $\langle E\rangle$ имеет вид конечной суммы $\oplus_i E^{d_i}[i]$.

(2) Пусть $X \in \mathcal{T}$. Рассмотрим канонический морфизм $ev\colon \oplus_i \mathrm{Hom}^i(E,X) \otimes_{\mathsf{k}} E[-i] \to X$ и его дополнение до выделенного треугольника:

$$X_E := \oplus_i \mathrm{Hom}^i(E,X) \otimes_{\mathsf{k}} E[-i] \to X \to C(ev) =: X_{E^\perp} \to X_E[1].$$

Здесь сумма существует, потому что конечна, так как категория $\mathcal{T}$ Ext-конечна. Легко видеть, что ev индуцирует изоморфизм на $\mathrm{Hom}^i(E,-)$ при всех i. Таким образом, $X_E \in \langle E\rangle$, $X_{E^\perp} \in E^\perp$ и треугольник $X_E \to X \to X_{E^\perp} \to X_E[1]$ доказывает, что $\mathcal{T} = \langle E^\perp, \langle E\rangle\rangle$.

Аналогично, имеется выделенный треугольник

$$C(ev')[-1] \to X \xrightarrow{ev'} \oplus_i \mathrm{Hom}^i(X,E)^* \otimes_{\mathsf{k}} E[i] \to C(ev'),$$

где $C(ev')[-1] \in {}^\perp E$, следовательно $\mathcal{T} = \langle\langle E\rangle, {}^\perp E\rangle$. □

Замечание 13. Из доказательства следует явный вид функторов проекции на компоненты разложений $\langle E^\perp, \langle E\rangle\rangle$ и $\mathcal{T} = \langle\langle E\rangle, {}^\perp E\rangle$ и соответственно функторов перестройки относительно E. Имеем:

$$\begin{aligned}
p_E^{\langle\langle E\rangle, {}^\perp E\rangle}(X) &= \oplus_i \mathrm{Hom}^i(E,X) \otimes_{\mathsf{k}} E[-i],\\
p_E^{\langle E^\perp, \langle E\rangle\rangle}(X) &= \oplus_i \mathrm{Hom}^i(X,E)^* \otimes_{\mathsf{k}} E[i],\\
p_{E^\perp}(X) = L_E(X) &= C(\oplus_i \mathrm{Hom}^i(E,X) \otimes_{\mathsf{k}} E[-i] \to X),\\
p_{{}^\perp E}(X) = R_E(X) &= C(X \to \oplus_i \mathrm{Hom}^i(X,E)^* \otimes_{\mathsf{k}} E[i])[-1].
\end{aligned}$$

Определение 14. Последовательность объектов $(E_1, \ldots, E_n)$ триангулированной k-линейной категории $\mathcal{T}$ называется *исключительным набором*, если все E_i исключительны и при всех $s \in \mathbb{Z}$, $i < j$ выполнено

$$\mathrm{Hom}^s(E_j, E_i) = 0.$$

Предложение 15. *Пусть* $(E_1, \ldots, E_n)$ — *исключительный набор в* Ext-*конечной триангулированной категории* $\mathcal{T}$. *Тогда порождённая им триангулированная подкатегория*

$$\langle E_1, \ldots, E_n \rangle := \langle \langle E_1 \rangle, \ldots, \langle E_n \rangle \rangle \subset \mathcal{T}$$

допустима.

Доказательство. Следует из предложений 12 и 7. □

Следствие 16. *Пусть* $(E_1, \ldots, E_n)$ — *исключительный набор в* Ext-*конечной триангулированной категории* $\mathcal{T}$. *Тогда* $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle = \mathcal{T}$ *титтк* $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle^\perp = 0$ *титтк* ${}^\perp\langle E_1, \ldots, E_n \rangle = 0$.

Доказательство. Следует из предложений 15 и 5. □

Определение 17. Исключительный набор $(E_1, \ldots, E_n)$ в триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется *полным*, если $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle = \mathcal{T}$.

Исключительные наборы также можно перестраивать. Пусть $(E_1, \ldots, E_n)$ — исключительный набор в триангулированной категории $\mathcal{T}$, которую мы предполгаем Ext-конечной. Для любого i рассмотрим подкатегорию $\mathcal{T}_i = \langle E_i, E_{i+1} \rangle \subset \mathcal{T}$. Перестраивая E_{i+1} влево относительно E_i, получим исключительный объект $L_{E_i}(E_{i+1})$ и разложение $\mathcal{T}_i = \langle L_{E_i}(E_{i+1}), E_i \rangle$. Перестраивая E_i вправо относительно E_{i+1}, получим исключительный объект $R_{E_{i+1}}(E_i)$ и разложение $\mathcal{T}_i = \langle E_{i+1}, R_{E_{i+1}}(E_i) \rangle$. Дополняя исходный набор полученными парами, получаем исключительные наборы

$$(E_1, \ldots, E_{i-1}, L_{E_i}(E_{i+1}), E_i, E_{i+2}, \ldots, E_n), \quad (E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, R_{E_{i+1}}(E_i), E_{i+2}, \ldots, E_n),$$

которые порождают ту же подкатегорию $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle$ в $\mathcal{T}$.

Задача 2. Проверьте, что перестройки задают действие группы кос из $n-1$ нити на множестве исключительных наборов из n объектов в $\mathcal{T}$.

Пример 18. Пусть Γ — колчан без ориентированных циклов. Пусть $A = \mathsf{k}\Gamma/I$ для допустимого идеала соотношений I. Занумеруем вершины числами $1, \ldots, n$ так, чтобы стрелки шли слева направо.

Задача 3. Покажите, что неразложимые проективные и инъективные A-модули образуют полные исключительные наборы $(P_1, \ldots, P_n)$, $\quad (I_1, \ldots, I_n)$ в $D^b(\mathrm{mod}{-}A)$.

Задача 4. a) Покажите, что $\dim \mathrm{Ext}^1(S_i, S_j) = \#\{\text{стрелки из } j \text{ в } i\}$;
b) набор $(S_n, \ldots, S_1)$ — полный и исключительный в $D^b(\mathrm{mod}{-}A)$.

На прошлой лекции мы получили необходимые и достаточные условия для эквивалентности производных категорий модулей над кольцом. Сформулируем ещё раз достаточное условие в удобном для применения виде и в немного большей общности.

Теорема 19. *Пусть* $\mathcal{T} = D^b(\mathrm{Mod}{-}B)$ *для некоторого кольца* B, *объект* $G \in \mathcal{T}$ *удовлетворяем свойству* $\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{T}}(G, G) = 0$ *при* $i \neq 0$. *Положим* $A := \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(G)$. *Тогда корректно определён точный функтор*

$$R\,\mathrm{Hom}(G, -)\colon \mathcal{T} \to D^b(\mathrm{Mod}{-}A),$$

индуцирующий эквивалентность $\langle G \rangle \to \mathrm{Perf}(A)$ *и переводящий* G *в* A.

Определение 20. Объект G триангулированной категории, для которого $\mathrm{Hom}^i(G,G)=0$ при всех $i\neq 0$, называется *tilting объектом.*

Отличный способ получить tilting объект — сильный исключительный набор.

Определение 21. Исключительный набор $(E_1,\dots,E_n)$ в триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется *сильным*, если $\mathrm{Hom}^s(E_i,E_j)=0$ при всех $s\neq 0$ и всех i,i.

По сильному исключительному набору $(E_1,\dots,E_n)$ в $\mathcal{T}$ можно построить tilting объект $E=\oplus E_i$. Несложно видеть, что его алгебра эндоморфизмов $\mathrm{End}(E)$ изоморфна алгебре путей с соотношениями в колчане с вершинами $E_1,\dots,E_n$, где стрелки идут строго слева направо, причём идеал соотношений можно считать допустимым. Если категория $\mathcal{T}$ Hom-конечна, то колчан конечен и алгебра $\mathrm{End}(E)$ конечномерна. Кроме того, по задаче с одной из прошлых лекций алгебра $\mathrm{End}(E)$ имеет глобальныую размерность, ограниченную сверху числом $n-1$.

Теперь выясним, какова связь между ограниченной производной категорией $D^b(\mathrm{mod}{-}A)$ и категорией совершенных комплексов $\mathrm{Perf}(A)$. Будем предпологать, что кольцо A нётерово, в этом случае можно считать, что $\mathrm{Perf}(A)\subset D^b(\mathrm{mod}{-}A)$.

Предложение 22. *Пусть A — нётерово кольцо.*

1. *Если* $\mathrm{gldim}(A)<\infty$*, то* $\mathrm{Perf}(A)=D^b(\mathrm{mod}{-}A)$.

   Предположим теперь, что A — конечномерная алгебра. Тогда:

2. $\mathrm{gldim}(A)<\infty \iff \mathrm{Perf}(A)=D^b(\mathrm{mod}{-}A)$,

3. *категория $D^b(\mathrm{mod}{-}A)$ является* Hom*-конечной, а $\mathrm{Perf}(A)$ является* Ext*-конечной.*

Задача 5. Пусть A — конечномерная алгебра и категория $D^b(\mathrm{mod}{-}A)$ Ext-конечна. Тогда $\mathrm{gldim}(A)<\infty$.

Из всего сказанного вытекает

Следствие 23. *Пусть B — k-алгебра и $(E_1,\dots,E_n)$ — сильный полный исключительный набор в категории $D^b(\mathrm{mod}{-}B)$. Положим $E:=\oplus_i E_i$ и $A:=\mathrm{End}(E)$. Тогда имеется точная эквивалентность $D^b(\mathrm{mod}{-}B)\to D^b(\mathrm{mod}{-}A)$. Алгебры A и B имеют конечную глобальную размерность.*

Такие эквивалентности представляют большой интерес для теории представлений. Они связывают теорию представлений для разных алгебр.