Функторы отражений

Сегодня мы получим первые эквивалентности между производными категориями представлений алгебр.

Пусть Γ — колчан без ориентированных циклов. Вершина $v \in \Gamma$ называется *источником* (соотв. *стоком*), если в v (соотв. из v) не ведёт ни одной стрелки. Для источника v обозначим через $\sigma_v^+\Gamma$ колчан, полученный из Γ обращением всех стрелок, исходящих из v. Для стока v обозначим через $\sigma_v^-\Gamma$ колчан, полученный из Γ обращением всех стрелок, входящих из v.

Пусть v — источник, упорядочим вершины так, чтобы v шла первой. Рассмотрим полный и сильный исключительный набор $P_i, i \in \Gamma_0$ в $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma)$. Перестроим P_v относительно подкатегории $\langle P_i \rangle_{i \neq v}$ вправо, обозначим

$$P'_v := R_{\langle P_i \rangle_{i \neq v}}(P_v)[1].$$

Лемма 1. *Объект P'_v является модулем, имеем*

$$P'_v = \operatorname{coker}\left(P_v \xrightarrow{f} \bigoplus_{a \in \Gamma_1, s(a)=v} P_{t(a)}\right). \tag{1}$$

Более того, для всех $i \neq v$ имеем

$$\operatorname{Hom}(P_i, P'_v) \cong \bigoplus_{a \in \Gamma_1, s(a)=v} \operatorname{Hom}(P_i, P_{t(a)}),$$

и $\operatorname{Hom}^s(P_i, P'_v) = 0$ при $s \neq 0$.

Доказательство. Гомоморфизм $f\colon P_v \to \oplus_{a \in \Gamma_1, s(a)=v} P_{t(a)}$ канонический: он образован гомоморфизмами $P_{s(a)} \xrightarrow{a} P_{t(a)}$, где a — стрелка с началом в v. Очевидно, он инъективен. При этом f для всех $i \neq v$ индуцирует изоморфизмы на $\operatorname{Hom}(-, P_i)$ (потому что морфизмы имеют базис из путей) и на $\operatorname{Ext}^i(-, P_i)$ (потому что обе части равны нулю). Следовательно, $\operatorname{coker} f$ ортогонально слева ко всем модулям P_i, $i \neq v$. Треугольник

$$(\operatorname{coker} f)[-1] \to P_v \to \oplus_{a \in \Gamma_1, s(a)=v} P_{t(a)} \to \operatorname{coker} f$$

задаёт разложение P_v относительно полуортогонального разложения

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) = \langle \langle P_i \rangle_{i \neq v}, {}^\perp \langle P_i \rangle_{i \neq v} \rangle.$$

Значит, $(\operatorname{coker} f)[-1] \cong R_{\langle P_i \rangle_{i \neq v}}(P_v)$.

Второе утверждение следует из равенства (1). $\square$

Положим $P'_i := P_i$ при $i \neq v$. Упорядочим модули P'_i так, чтобы P'_v шёл последним. Из леммы 1 следует, что исключительный набор $P'_i, i \in \Gamma_0$ в $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma)$ сильный, и его алгебра эндоморфизмов есть $\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma$. Отсюда получаем, используя результаты прошлой лекции:

Предложение 2. *В сделанных обозначениях функтор*

$$\Phi_v^+ := R\operatorname{Hom}(\oplus_i P'_i, -)\colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma)$$

задаёт эквивалентность категорий.

Эта эквивалентность называется *функтором правого отражения*. Изучим эти функторы подробнее.

Во-первых, их можно итерировать.

Определение 3. Скажем, что последовательность $v_1, \ldots, v_m$ вершин колчана Γ $+$-*допустима*, если v_1 — источник в Γ и при всех $i = 1, \ldots, m-1$ вершина v_{i+1} — источник в колчане $\sigma^+_{v_i} \ldots \sigma^+_{v_1}\Gamma$. Аналогично определяется $-$-допустимая последовательность вершин колчана.

Для такой последовательности вершин композиция правых отражений задаёт эквивалентность категорий

$$\Phi^+_{v_m} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1} \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod{-}k}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod{-}k}\sigma^+_{v_m} \ldots \sigma^+_{v_1}\Gamma).$$

Следствие 4. *Если подлежащий граф колчана Γ — дерево, то для любого колчана Γ', полученного из Γ заменой ориентации стрелок, имеется эквивалентность категорий $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod{-}k}\Gamma) \cong \mathcal{D}^b(\mathrm{mod{-}k}\Gamma')$.*

Доказательство вытекает из предложения 2 и следующего упраженения.

Задача 1. Если подлежащий граф колчана Γ — дерево, то для любого колчана Γ', полученного из Γ заменой ориентации стрелок, имеется $+$-допустимая последовательность вершин $v_1, \ldots, v_m$ в Γ, что $\sigma^+_{v_m} \ldots \sigma^+_{v_1}\Gamma \cong \Gamma'$.

Во-вторых, полезно описать обратную эквивалентность к Φ^+_v. Она задаётся фунтором левого отражения, который сейчас будет определен.

Пусть $v \in \Gamma_0$ — сток, упорядочим вершины так, чтобы v шла последней. Рассмотрим полный и сильный исключительный набор $P_i, i \in \Gamma_0$ в $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod{-}k}\Gamma)$. Перестроим P_v относительно подкатегории, порождённой остальными объектами, влево, обозначим

$$P'_v := L_{\langle P_i \rangle_{i \neq v}}(P_v)[-1].$$

Лемма 5. *Имеем выделенный треугольник*

$$P'_v \to \bigoplus_{a \in \Gamma_1, t(a) = v} P_{s(a)} \xrightarrow{g} P_v \to S_v,$$

где g — ядро канонической проекции $P_v \to S_v$, и значит $P'_v \cong S_v[-1] \cong I_v[-1]$. Для всех $i \neq v$ имеем

$$\mathrm{Hom}(P'_v, P_i) \cong \bigoplus_{a \in \Gamma_1, t(a) = v} \mathrm{Hom}(P_{s(a)}, P_i),$$

и $\mathrm{Hom}^s(P'_v, P_i) = 0$ при $s \neq 0$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1. □

Положим $P'_i := P_i$ при $i \neq v$, поставим его первым. Из леммы 5 следует, что исключительный набор $P'_i, i \in \Gamma_0$ в $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod{-}k}\Gamma)$ сильный, и его алгебра эндоморфизмов есть $\mathsf{k}\sigma^-_v\Gamma$. Отсюда получаем, используя результаты прошлой лекции:

Предложение 6. *В сделанных обозначениях функтор*

$$\Phi^-_v := R\,\mathrm{Hom}(\oplus_i P'_i, -) \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod{-}k}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod{-}k}\sigma^-_v\Gamma)$$

задаёт эквивалентность категорий.

Предложение 9. 17.11.2020

Лекция 10

Такие функторы называются *левыми отражениями*. Чтобы убедиться, что они обратны правым отражениям, полезно посмотреть на них чуть иначе. Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория вида $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}B)$ для кольца B. Пусть $(\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n)$ — сильный исключительный набор в $\mathcal{T}$, и алгебра эндоморфизмов объекта $\mathcal{E}=\oplus\mathcal{E}_i$ есть $\mathsf{k}\Gamma$. При этом вершина 1 — источник в Γ. Тогда рассмотрим набор

$$(\mathcal{E}'_2,\dots,\mathcal{E}'_n,\mathcal{E}'_1):=(\mathcal{E}_2,\dots,\mathcal{E}_n,R_{\langle\mathcal{E}_2,\dots,\mathcal{E}_n\rangle}(\mathcal{E}_1)[1]),$$

он также сильный. Заметим, что $\mathcal{E}_1$ получается из $\mathcal{E}'_1$ обратной перестройкой и сдвигом: $\mathcal{E}_1=L_{\langle\mathcal{E}_2,\dots,\mathcal{E}_n\rangle}(\mathcal{E}'_1)[-1]$. При этом алгебра эндоморфизмов объекта $\mathcal{E}'=\oplus\mathcal{E}'_i$ есть $\mathsf{k}\sigma_1^+\Gamma$. Обозначим $\Gamma':=\sigma_1^+\Gamma$. Есть две эквивалентности

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma)\xleftarrow{\alpha}\langle\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\dots,\mathcal{E}_n\rangle=\langle\mathcal{E}'_2,\dots,\mathcal{E}'_n,\mathcal{E}'_1\rangle\xrightarrow{\alpha'}\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma').$$

Несложно видеть, что эквивалентность $\alpha'\alpha^{-1}\colon\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma)\to\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma')$ есть правое отражение, а эквивалентность $\alpha\alpha'^{-1}\colon\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma')\to\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma)$ — левое отражение, и они взаимно обратны. Этой конструкцией, не оперирующей проективными и прочими модулями, мы будем пользоваться и дальше.

В третьих, выясним, что происходит при функторах отражений с модулями.

Напомним, что для сильного исключительного набора $(\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n)$ эквивалентность

$$R\operatorname{Hom}(\oplus\mathcal{E}_i,-)\colon\langle\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n\rangle\to\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\operatorname{End}(\oplus\mathcal{E}_i))$$

переводит объекты $\mathcal{E}_i$ в неразложимые проективные модули P_i над алгеброй $\operatorname{End}(\oplus\mathcal{E}_i)$). Отсюда следует, что при $i\neq v$ правое Φ_v^+ и левое Φ_v^- отражения переводят проективные модули P_i друг в друга:

$$\Phi_v^+(P_u)\cong P_u, u\neq v. \tag{2}$$

Далее, $\alpha^{-1}(P_v)\cong\mathcal{E}_v\cong L_{\langle\mathcal{E}'_u\rangle_{u\neq v}}(\mathcal{E}'_v)[-1]$ и в силу леммы 5

$$\Phi_v^+(P_v)\cong\alpha'(\alpha^{-1}(P_v))\cong\alpha'(L_{\langle\mathcal{E}'_u\rangle_{u\neq v}}(\mathcal{E}'_v)[-1])\cong L_{\langle P_u\rangle_{u\neq v}}(P_v)[-1]\cong I_v[-1]. \tag{3}$$

Оказывается, что все неразложимые $\mathsf{k}\Gamma$-модули, кроме P_v, при отражении Φ_v^+ переходят в неразложимые $\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma$-модули (а не какие-нибудь комплексы). Чтобы это понять, нужен очень важный факт.

Напомним, что абелева категория $\mathcal{A}$ называется *наследственной*, если её гомологическая размерность не более 1, т.е. $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N)=0$ при всех $M,N\in\mathcal{A}$ и $i>1$.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{A}$ — наследственная абелева категория, M — ограниченный комплекс над $\mathcal{A}$. Тогда M изоморфен $\oplus_i H^i(M)[-i]$ в $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$. В частности, любой неразложимый объект в $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ имеет вид $M[i]$, где $M\in\operatorname{Ind}(\mathcal{A})$.*

Лемма 8. *Пусть M,N — конечные комплексы над наследственной абелевой категорией $\mathcal{A}$, $n\in\mathbb{Z}$, причём $M^i=0$ при $i\leqslant n$, $N^i=0$ при $i\geqslant n$. Тогда* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M,N)=0$.

Доказательство. Доказывается индукцией по числу членов в M, N. □

Доказательство теоремы 7. Для любого $n\in\mathbb{Z}$ покажем, что $M\cong\tau_{\leqslant n}M\oplus\tau_{\geqslant n+1}M$ в $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$. Имеем выделенный треугольник в $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$:

$$\tau_{\leqslant n}M\to M\to\tau_{\geqslant n+1}M\xrightarrow{f}(\tau_{\leqslant n}M)[1].$$

Здесь морфизм f удовлетворяет условиям леммы 8 и потому $f=0$. Значит, указанный треугольник расщепим.

Продолжая расщеплять комплекс на слагаемые, получим несколько слагаемых из одного члена, ч.т.д. □

Теперь мы можем доказать

Пусть v — источник в колчане Γ, а $\Phi_v^+ \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma)$ — соответствующий функтор отражения. Пусть $M \in \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma)$ — неразложимый модуль. Тогда

$$\begin{cases} \Phi_v^+(M) \in \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma), & \textit{если} \quad M \not\cong P_v, \\ \Phi_v^+(P_v) \cong I_v[-1] & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Мы знаем, что $\Phi_v^+(M)$ — неразложимый объект в категории $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma)$. Из теоремы 7 следует, что $\Phi_v^+(M) \cong N[d]$, — где N — некоторый модуль над $\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma$ и $d \in \mathbb{Z}$. Если M отличен от P_v, то имеется ненулевой морфизм $P_u \to M$ для некоторого $u \neq v$. Следовательно, имеется ненулевой морфизм $P_u \cong \Phi_v^+(P_u) \to \Phi_v^+(M) \cong N[d]$, смотри (2). Значит, $d = 0$. Второе утверждение мы уже знаем, смотри (3). □

Аналогично имеем

Предложение 10. *Пусть v — сток в колчане Γ, а $\Phi_v^- \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\sigma_v^-\Gamma)$ — соответствующий функтор отражения. Пусть $M \in \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma)$ — неразложимый модуль. Тогда*

$$\begin{cases} \Phi_v^-(M) \in \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\sigma_v^-\Gamma) & \textit{если} \quad M \not\cong I_v, \\ \Phi_v^-(I_v) \cong P_v[1] & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Пусть M — неразложимый модуль над $\mathsf{k}\Gamma$, $v \in \Gamma_0$ — источник. Тогда $\Phi_v^+(M)$ есть сдвиг некоторого неразложимого модуля над $\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma$ на некоторое число d, Обозначим этот модуль через $\bar{\Phi}_v^+(M)$. Мы знаем, что $d = -1$, если $M \cong P_v$, и $d = 0$ иначе. Несложно убедиться в том, что справедливо

Предложение 11. *Пусть v — источник в колчане Γ., положим. Тогда Φ_v^+ задаёт биекцию*

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \setminus \{P_v\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma) \setminus \{I_v\},$$

а $\bar{\Phi}_v^+$ — биекцию

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma).$$

Теперь применим несколько отражений последовательно.

Для $+$-допустимой последовательности $v_1, \dots, v_m$ положим $\Gamma' := \sigma_{v_m}^+ \dots \sigma_{v_1}^+\Gamma$, тогда эквивалентность

$$\Phi_{v_m}^+ \circ \dots \circ \Phi_{v_1}^+ \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma').$$

Также имеется биекция

$$\bar{\Phi}_{v_m}^+ \circ \dots \circ \bar{\Phi}_{v_1}^+ \colon \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \to \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma').$$

Определение 12. Скажем, что неразложимый $\mathsf{k}\Gamma$-модуль M *$+$-регулярен* относительно $+$-допустимой последовательности вершин $v_1, \dots, v_m$, если $\Phi_{v_m}^+ \circ \dots \circ \Phi_{v_1}^+(M)$ является модулем (а не сдвигом модуля). По предложению 9 это условие влечёт то, что при всех $k \leqslant m$ объект $\Phi_{v_k}^+ \circ \dots \circ \Phi_{v_1}^+(M)$ также является модулем. Аналогично определяется $-$-регулярный неразложимый модуль относительно $-$-допустимой последовательности вершин колчана.

Предложение 13. *Пусть неразложимый $\mathsf{k}\Gamma$-модуль M не $+$-регулярен относительно $+$-допустимой последовательности вершин $v_1, \dots, v_m$. Тогда $M \cong \Phi_{v_1}^- \circ \dots \circ \Phi_{v_k}^-(P_{v_{k+1}})$ при некотором $k = 0, \dots, m-1$.*

Доказательство. По предположению, существует такое k, что объект $\Phi^+_{v_k} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}(M)$ является модулем, а $\Phi^+_{v_{k+1}} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}(M)$ модулем уже не является. По предложению 9 это значит, что $\Phi^+_{v_k} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}(M) \cong P_{v_{k+1}}$ и следовательно $M \cong \Phi^-_{v_1} \circ \ldots \circ \Phi^-_{v_k}(P_{v_{k+1}})$. □

Замечание 14. Предложение 13 говорит, что количество модулей, не $+$-регулярных относительно $+$-допустимой последовательности $v_1, \ldots, v_m$, не превышает m. Их может быть и меньше, если для некоторого модуля M среди модулей $\bar{\Phi}^+_{v_k} \circ \ldots \circ \bar{\Phi}^+_{v_1}(M)$ (где $k = 0, \ldots, m-1$) более одного проективного. Соответственно, в этом случае некоторые объекты $\Phi^-_{v_1} \circ \ldots \circ \Phi^-_{v_k}(P_{v_{k+1}})$ из предложения 13 не будут модулями.

Следствие 15. *Пусть $v_1, \ldots, v_m$ является $+$-допустимой последовательностью вершин в Γ, положим $\Gamma' := \sigma^+_{v_m} \ldots \sigma^+_{v_1}\Gamma$. Тогда функтор $\Phi^+_{v_m} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}$ задаёт биекцию между неразложимыми $\mathsf{k}\Gamma$-модулями, $+$-регулярными относительно $v_1, \ldots, v_m$, и неразложимыми $\mathsf{k}\Gamma'$-модулями, $-$-регулярными относительно $-$-регулярной последовательности $v_m, \ldots, v_1$ вершин Γ'.*

Наконец, разберём пример.

Пример 16. Пусть $\Gamma = (1 \to 2)$, положим $\Gamma' := \sigma^+_1\Gamma = (2 \to 1)$, $\Gamma'' := \sigma^+_2\Gamma' = (1 \to 2)$. Обратите внимание: эти три колчана изоморфны, но обозначения представлений Γ' не такие, как для Γ и Γ''! Есть три неразложимых $\mathsf{k}\Gamma$-модуля: $S_1 \cong P_1$, $S_2 \cong I_2$, $P_2 \cong I_1$. Имеем эквивалентности $\Phi^+_1 \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma')$ и $\Phi^+_2 \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma') \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma'')$, а также изоморфизмы

$$\begin{array}{lll}
\Phi^+_1(P_1) \cong I_1[-1], & \Phi^+_2(P_2) \cong I_2[-1], & \Phi^+_2\Phi^+_1(P_1) \cong P_2[-1], \\
\Phi^+_1(P_2) \cong P_2, & \Phi^+_2(P_1) \cong P_1, & \Phi^+_2\Phi^+_1(P_2) \cong I_2[-1], \\
\Phi^+_1(S_2) \cong P_1, & \Phi^+_2(I_1) \cong P_2, & \Phi^+_2\Phi^+_1(S_2) \cong P_1.
\end{array}$$

Таким образом, относительно $+$-допустимой последовательности $1, 2$ в Γ модуль S_2 $+$-регулярен, а P_1, P_2 — не $+$-регулярны.