1. ВЕКТОРЫ.

Задача 1. Пусть A, B, C — точки одной прямой, а O — точка плоскости/пространства, содержащей данную прямую. Точка C делит отрезок AB в отношении $x : y$, считая от точки A (здесь $x, y \geq 0$ — неотрицательные действительные числа). Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. а) Что будет, если в полученных формулах взять x или y или оба числа отрицательными? б) Какое дополнительное условие нужно добавить к задаче, чтобы ее ответ и решение оставались верными в случае, когда точка O сама лежит на прямой AB? в*) Продумайте комплексный аналог этой задачи.

Задача 2. а) Пусть ABC — треугольник на плоскости, D — точка той же плоскости, а O — пространства, содержащего эту плоскость. Докажите, что существуют и единственны числа x, y, z такие, что $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, и докажите, что $x+y+z = 1$. б) Докажите, что точка D принадлежит треугольнику ABC тогда и только тогда, когда $x, y, z \geq 0$. Для каких точек $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$? Для какой точки $x = y = z = 1/3$? в) Какой геометрический смысл имеют числа x, y, z? (можете предположь для простоты, что $x, y, z \geq 0$) г) Как нужно изменить условие задачи, если точка O принадлежит плоскости ABC?

Задача 3. Пусть ABC — треугольник на плоскости. а) Точка D_1 делит отрезок AB в отношении $x_1 : y_1$, считая от точки A, а точка D_2 делит отрезок BC в отношении $x_2 : y_2$, считая от точки B. В каком отношении точка E пересечения отрезков CD_1 и AD_2 делит отрезок CD_1? б) Пусть точка D_3 делит отрезок CA в отношении $x_3 : y_3$, считая от точки C, и такова, что отрезок BD_3 проходит через точку E. Докажите, что $x_1x_2x_3 = y_1y_2y_3$.

Задача 4. а) Докажите с использованием задачи 3, что три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке M (центре тяжести треугольника), причем точка M делит каждую из медиан в отношении $2 : 1$, считая от вершины. б) Докажите, что для любой точки O пространства, содержащего плоскость ABC, имеет место равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. в) Докажите равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$ и докажите, что центр тяжести треугольника — единственная точка плоскости, обладающая этим свойством. г) Пусть $ABCD$ — тетраэдр в пространстве, и A_1, B_1, C_1, D_1 — центры тяжести граней BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке M — центре тяжести тетраэдра, которая делит каждый из них в отношении $3 : 1$, считая от вершины. Сформулируйте и решите аналоги задач 4б и 4в в данной ситуации. д) Сформулируйте и решите n-мерный аналог задачи 4г.