

2. БАЗИСЫ И ПОДПРОСТРАНСТВА.

Задача 1. Пусть \mathbb{F}_q — конечное поле из q элементов (например, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), а V — n -мерное пространство над полем \mathbb{F}_q . а) Сколько элементов содержит пространство V ? б) Сколько базисов существует в пространстве V ? в) Сколько в пространстве V существует k -мерных подпространств? Докажите, что зависимость этого числа от q — многочлен; вычислите значение этого многочлена в точке $q = 1$.

Задача 2. Имеется n лампочек и несколько кнопок-выключателей, каждая из которых меняет на противоположное состояние некоторого набора лампочек (своего для каждой кнопки): при нажатии на кнопку если лампочка входит в соответствующий набор и включена, то она выключается, а если входит в набор и выключена, то включается. Наборы разных кнопок могут пересекаться. Докажите, что общее число состояний всех n лампочек, которые можно получить, нажимая на кнопки, является степенью двойки.

Задача 3. а) Выпишите условия, при которых векторы $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{F}^2$ линейно зависимы. б) Тот же вопрос про векторы $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{F}^3$. в) Тот же вопрос про векторы $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{F}^3$. г) Какую размерность может иметь пересечение $\langle a, b \rangle \cap \langle c, d \rangle$, где $a = (a_1, a_2, a_3), \dots, d = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{F}^3$? Выпишите условия на числа a_i, b_i, c_i, d_i , при которых пересечение имеет заданную размерность. Найдите (произвольный) базис в этом пересечении.

Указание. Желательно, чтобы условия линейной зависимости представляли собой алгебраические уравнения или неравенства на переменные a_i, b_i и т.д. При решении задачи 3г достаточно выписать систему линейных уравнений для координат векторов базиса; решать эти уравнения необязательно (решение в общем виде будет довольно громоздким).