3. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.

Задача 1. Пусть $V = \mathbb{R}[t]_n$ — векторное пространство многочленов степени не выше n; $A - \frac{d}{dt} : V \to V$ — линейный оператор, переводящий многочлен в его производную. Докажите, что многочлены $1, t, t^2, \dots, t^n$ образуют базис в V, и запишите для произвольного $k = 1, 2, \dots$ матрицу оператора A^k в этом базисе. Проверьте непосредственным умножением матриц, что матрица оператора A^k, умноженная на матрицу оператора A, дает матрицу оператора A^{k+1}.

Задача 2. а) Напишите матрицу поворота $R(\varphi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ плоскости на угол φ вокруг начала координат в стандартном базисе. Проверьте непосредственным вычислением равенства $R_n(\varphi + \psi) = R_n(\varphi)R_n(\psi)$ и $R_n^{-1}(\varphi) = R_n(-\varphi)$. б) Те же вопросы для оператора $M_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ умножения на комплексное число $z = a + bi$ в множестве $\mathbb{C}$, рассматриваемом как двумерное пространство над полем $\mathbb{R}$ с базисом $1, i$. Как связана эта задача с задачей 2а?

Задача 3. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — базис в векторном пространстве V, и $u_1, \dots, u_n \in V$, где $u_i = a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n$ для всех $i = 1, \dots, n$. а) Докажите, что $u_1, \dots, u_n$ тогда и только тогда является базисом в V, когда матрица $A = (a_{ij})$ имеет обратную (в этом случае она называется матрицей перехода от базиса v к базису u). Матрицей какого линейного оператора (и в каком базисе) является A? б) Пусть W — векторное пространство, $w_1, \dots, w_k \in W$ — базис, $f : V \to W$ — линейное отображение, имеющее в базисах v, w матрицу $X = (x_{ij})_{1 \le i \le k}^{1 \le j \le n}$ (иными словами, $f(v_i) = x_{i1}w_1 + \dots + x_{ik}w_k$ для всех $i = 1, \dots, n$). Пусть $w'_1, \dots, w'_k \in V$ — другой базис, и A — матрица перехода от базиса w к базису w'. Запишите матрицу линейного отображения f в базисах v, w'. в) Аналогичный вопрос в случае, когда $v'_1, \dots, v'_n \in V$ — другой базис, и нужна матрица f в базисах v', w. г) Докажите, что для всякой $(n \times k)$-матрицы X существуют обратимая $(n \times n)$-матрица A и обратимая $(k \times k)$-матрица B такие, что $AXB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Чему равно количество единиц на главной диагонали?

Задача 4. а) При каком условии на числа a, b, c, d матрица $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеет обратную? б) Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. При каких условиях на a, b, c, d матрица X^{-1} существует и ее элементы — также целые числа?

Задача 5. $n \times n$-матрица $A = (a_{ij})$ называется верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ при всех $i > j$. Докажите, что верхнетреугольная матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда все ее диагональные элементы отличны от нуля: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \neq 0$, и что если обратная матрица существует, то она тоже является верхнетреугольной.

Задача 6. Назовем λ-жордановой клеткой $n \times n$-матрицу $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$. а) Вычислите матрицы $J_n^2(\lambda), J_n^3(\lambda), \dots, J_n^n(\lambda)$. б) Вычислите матрицу $J_n^k(\lambda)$ для произвольного $k \in \mathbb{Z}$. в) Вычислите матрицу $P(J_n(\lambda))$, где $P(t)$ — произвольный многочлен. г) Тот же вопрос, что в пункте 6в, но $P(t)$ — произвольная рациональная функция. д) Докажите, что жордановы клетки $J_n(\lambda)$ и $J_n(\mu)$ коммутируют при всех λ и μ, и вычислите матрицу $Q(J_n(\lambda), J_n(\mu))$, где $Q(x, y)$ — произвольный многочлен от двух переменных.