4. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ).

Пусть $V_n = \mathbb{R}[t]_n$ — пространство многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Для произвольной точки $a \in \mathbb{R}$ обозначим $\ell_a : V_n \to \mathbb{R}$ линейный функционал $\ell_a(P) \stackrel{\text{def}}{=} P(a)$.

Задача 1. а) Пусть $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ — попарно различные точки. Докажите, что функционалы $\ell_{a_0}, \dots, \ell_{a_n} \in V_n^*$ образуют в V_n^* базис. б) Найдите в V_n базис, двойственным к которому является базис $\ell_{a_0}, \dots, \ell_{a_n} \in V_n^*$. в) Пространства V_i вложены друг в друга: если $k \le n$, то $V_k \subset V_n$ — векторное подпространство. Найдите (какой-нибудь) базис в аннуляторе $V_k^\perp \subset V_n^*$ и выразите базисные функционалы как линейные комбинации $\ell_{a_0}, \dots, \ell_{a_n}$. г) Найдите матрицу линейного оператора $\left(\frac{d}{dt}\right)^*$, двойственного к оператору взятия производной $\frac{d}{dt} : V_n \to V_n$, в базисе $\ell_{a_0}, \dots, \ell_{a_n}$.

Задача 2. а) При каких t оператор $tI - \frac{d}{dt} : V_n \to V_n$ имеет обратный? (I — единичный оператор, $\frac{d}{dt}$ и V_n — как в задаче 1.) Выпишите обратный оператор явно и найдите его матрицу в базисе $1, t, \dots, t^n$. б) Существует ли в пространстве V_n базис, в котором оператор $tI - \frac{d}{dt}$ является диагональным (то есть все его матричные элементы $a_{ij} = 0$ при $i \ne j$)?