Листок 1.

1. Доказать, что для метрики $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$, конформной исходной метрике g на $n-$мерном многообразии M, верны следующие преобразования:

$$a)\ \tilde{R}_{jk} = R_{jk} - (n-2)(\nabla_j\nabla_k\varphi - \nabla_j\varphi\nabla_k\varphi) + (\Delta_g\varphi - (n-2)|d\varphi|^2)g_{jk};$$

$$b)\ \tilde{S} = e^{-2\varphi}(S + 2(n-1)\Delta_g\varphi - (n-1)(n-2)|d\varphi|^2).$$

$$c)\ \Delta_{\tilde{g}} = e^{-2\varphi}\Delta_g,\ \text{если } \dim M = 2.$$

Здесь $R_{ij}, \tilde{R}_{ij}$ - тензоры Риччи метрик g и $\tilde{g}$ соответственно, $S, \tilde{S}$ - скалярные кривизны метрик g и $\tilde{g}$ соответственно, $\nabla_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ - ковариантная производная в направлении поля $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Указание. Используйте формулу $R_{ij} = \frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{ij}\Gamma^k_{sk} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^k_{sj}$.

2. Пусть многообразие M замкнуто.

a) Функционал $R[u] = \frac{||\nabla_g u||^2_{L^2(M,dv_g)}}{||u||^2_{L^2(M,dv_g)}}$ называется *отношением Рэлея.* Положим

$$\lambda_0 := \inf_{u\in H^1(M,dv_g)\setminus\{0\}} R[u].$$

Рассмотрим *минимизирующую последовательность* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(M, dv_g)$, т.е. $R[u_n] \to \lambda_0$, такую, что $||u_n||_{L^2(M,dv_g)} = 1$ для всех членов этой последовательности. Докажите, что существует подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(M, dv_g)$, сходящаяся к некоторой функции $u \in L^2(M, dv_g)$, причём $||u||_{L^2(M,dv_g)} = 1$.

b) Рассмотрите выражение $||\nabla_g(u_n - u_m)||^2_{L^2(M,dv_g)} + ||\nabla_g(u_n + u_m)||^2_{L^2(M,dv_g)}$, где $n, m \in \mathbb{N}$ и убедитесь, что последовательность $\{u_n\}_n \subset H^1(M, dv_g)$ является последовательностью Коши.

c) Докажите, что $\lambda_0 = R[u]$, т.е. значение λ_0 достигается на этой функции $u \in H^1(M, dv_g) \setminus \{0\}$. Рассмотрев константы на M, сделайте вывод о λ_0.

d) Положим $u_0 = Const$. Допустим, что мы определили пары $(\lambda_0, u_0), (\lambda_1, u_1), \ldots, (\lambda_{k-1}, u_{k-1})$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{k-1},$$

$$u_i \in L^2(M, dv_g) \cap C^\infty(M),$$

$$\langle u_i, u_j\rangle_{L^2(M,dv_g)} = \delta_{ij}\ \text{-}\textit{символ Кронекера}, \forall i, j \leqslant k-1,$$

$$\Delta_g u_i = \lambda_i u_i, \forall i \leqslant k-1.$$

Определим $H_k := \{v \in H^1(M, dv_g) \mid \langle v, u_i\rangle_{L^2(M,dv_g)} = 0, \forall i \leqslant k-1\}$ и $\lambda_k := \inf_{u\in H_k\setminus\{0\}} R[u]$. Повторяя рассуждения пунктов *a*) и *b*), докажите, что $\exists u_k \in H_k,\ ||u_k||_{L^2(M,dv_g)} = 1$ такая, что $\lambda_k = R[u_k]$ и что $\lambda_k \geqslant \lambda_{k-1}$.

e) Докажите, что $u_k \in L^2(M, dv_g) \cap C^\infty(M)$. **Укзание.** Рассмотрите *возмущение* функции u_k, т.е. функцию вида $u_k + t\varphi$, где $t \in \mathbb{R}, \varphi \in H_k$. Найдите первую вариацию функционала $R[u]$ по формуле $\frac{d}{dt}R[u_k + t\varphi]_{|t=0}, \forall\varphi \in H_k$. Чему она равна?

f) Докажите, что $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = +\infty$. **Указание.** Предположите противное и используйте теорему Реллиха-Кондрашова.