Листок 2.

1. Пусть $M-$ ориентируемая гиперповерхность *постоянной* средней кривизны в $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ и $B-$ её вторая квадратичная форма. Обозначим через ν векторное поле единичных нормалей к M. Докажите, что для всякого фиксированного вектора $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ верно, что

$$\Delta\langle a, \nu\rangle_{g_0} = |B|^2_{g_0}\langle a, \nu\rangle_{g_0}.$$

Здесь $\Delta-$ Лапласиан индуцированной метрики на M.

Укзание. Выберете локальный базис $\{e_i\}$ в касательном расслоении в окрестности точки p так, что $\nabla_{e_i}e_i(p) = 0$, где $\nabla-$ связность Леви-Чивиты индуцированной метрики на M. Используйте также уравнение Вейнгартена $\langle B(X,Y), \nu\rangle_g = -\langle(\overline{\nabla}_X\nu)^\tau, Y\rangle_g$, где $\overline{\nabla}-$ связность Леви-Чивиты объемлющего многообразия с метрикой g и $\tau-$ касательная компонента вектора.

2. a) Пусть $M \subset \overline{M}-$ минимальная поверхность в трёхмерном многообразии $(\overline{M}, g)$. Докажите, что $\overline{Ric}(\nu,\nu) + |B|^2_g = \frac{1}{2}(\overline{S} - 2K + |B|^2_g)$, где $\overline{Ric}$ и $\overline{S}-$ тензор Риччи и скалярная кривизна $(\overline{M}, g)$ соответсвенно, $K-$ гауссова кривизна M с индуцированной метрикой, $\nu-$ поле единичных нормалей к M.

Указание. Рассмотрите локальный базис $(e_1, e_2, e_3 = \nu)$ в касательном расслоении и убедитесь в том, что $\overline{Ric}(\nu,\nu) = \overline{R}_{1313} + \overline{R}_{2323}$. Затем используйте уравнение Гаусса

$$\langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle_g = \langle R(X,Y)Z,W\rangle_g - \langle B(X,W), B(Y,Z)\rangle_g + \langle B(X,Z), B(Y,W)\rangle_g.$$

Здесь $\overline{R}$ и $R-$ тензоры Римана $(\overline{M}, g)$ и M с индуцированной метрикой.

b) Теорема Шейна-Яу. Докажите, что если компактное двумерное многообразие M может быть реализовано как стабильная минимальная поверхность в трёхмерном многообразии $(\overline{M}, g)$ положительной скалярной кривизны так, что нормальное расслоение к M тривиально, то Эйлерова характеристика $\chi(M) > 0$.