Листок 3.

1. Плоским $n-$мерным тором $(\mathbb{T}^n, g_\Gamma)$ назовем риманово многообразие, полученное факторизацией $(\mathbb{R}^n, g_0)$ по решётке Γ. Рассмотрим *двойственную решётку* $\Gamma^* := \{x \in \mathbb{R}^{n*} \mid x(y) \in \mathbb{Z}\}$.

a) Докажите, что функции $\varphi_x(y) = \cos(2\pi x(y)),\ \psi_x(y) = \sin(2\pi x(y))$, где $x \in \Gamma^*$ являются собственными функциями на $(\mathbb{T}^n, g_\Gamma)$ с собственным значением $4\pi^2|x|^2_{g_0}$.

b) Рассмотрим комплекснозначные функции $f_x(y) = \varphi_x(y) + i\psi_x(y) = e^{2\pi i x(y)}$. Докажите, что функции $f_{x_1}, \ldots, f_{x_k}$, где $x_1, \ldots, x_k \in \Gamma^*$ все различны и $\forall j \in \overline{1,k}$ $|x_j|^2_{g_0} = \frac{\lambda}{4\pi^2}$, линейно независимы.

c) Пусть $E_\lambda = span\{\varphi_{x_j}(y), \psi_{x_j}(y) \mid j \in \overline{1,k}\}$, где $k-$количество различных $x_j \in \Gamma^*$, для которых $|x_j|^2_{g_0} = \frac{\lambda}{4\pi^2}$. Докажите, что $\oplus_\lambda E_\lambda$ плотно в $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ в смысле равномерной сходимости. Заключите из этого, что $E_\lambda-$собственное пространство. Чему равна $\dim E_\lambda$, т.е. кратность числа λ?

Указание: Используйте теорему Вейерштрасса-Стоуна, которая гласит, что если $M-$ гладкое компактное многообразие и $\mathcal{A}-$ подалгебра в $C^\infty(M)$, содержащая константы и разделяющая точки, тогда $\mathcal{A}$ плотна в $C^0(M)$, и как следствие, в $C^\infty(M)$ в смысле равномерной сходимости. Выразите f_{x+y} через f_x и f_y и докажите, что $\oplus_\lambda E_\lambda-$ подалгебра в $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

2. Пусть $(\mathbb{S}^n, g_0) \subset (\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ и пусть $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}, \Delta^{\mathbb{S}^n}-$ соответствующие Лапласианы. Можно показать, что для всякой функции f на $\mathbb{R}^{n+1}$ верно, что

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)|_{\mathbb{S}^n} = \Delta^{\mathbb{S}^n}(f|_{\mathbb{S}^n}) - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}|_{\mathbb{S}^n} - n\frac{\partial f}{\partial r}|_{\mathbb{S}^n}.$$

Здесь $r-$ расстояние от начала координат (радиальная составляющая сферических координат).

a) Докажите, что ограничение однородных гармонических многочленов степени k с $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbb{S}^n$ являются собственными функциями для $\Delta^{\mathbb{S}^n}$ с собственным значением $k(n+k-1)$.

b) Обозначим векторное пространство однородных гармонических многочленов степени k на $\mathbb{R}^{n+1}$ через $\mathcal{H}_k$, а пространство полученное из ограничений этих многочленов на $\mathbb{S}^n$ - через $\widetilde{\mathcal{H}_k}$. Пусть H_k- векторное пространство однородных многочленов степени k. Снабдим его скалярным произведением $\langle p, q\rangle = \int_{\mathbb{S}^n} pq dv_{g_0}$. Можно показать, что

$$H_{2k} = \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-2} \oplus \ldots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_0,$$

$$H_{2k+1} = \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-1} \oplus \ldots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_1.$$

Докажите, что $\widetilde{\mathcal{H}_k}$ является собственным пространством для $\Delta^{\mathbb{S}^n}$ с собственным значением $\lambda_k = k(n+k-1)$.

Указание: Докажите, что оператор ограничения функций с $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbb{S}^n$ определяет изоморфизм пространств $\mathcal{H}_k$ и $\widetilde{\mathcal{H}_k}$. Используйте теорему Вейерштрасса-Стоуна.

3. *a*) Пусть $\varphi\colon (M,g) \looparrowright (\mathbb{S}^n, g_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}-$ изометрическое погружение римановой поверхности (M,g). Докажите, что $\sum_{i=1}^{n+1} |\nabla_g \varphi^i|^2_{g_0} = 2$.

b) Пусть $(N,h) \to (M,g)-$ конформное накрытие степени d и существует конформное отображение $(M,g) \to (\mathbb{S}^n, g_0)$. Докажите, что $V_c(n,N) \leqslant dV_c(n,M)$.

c) Докажите, что $V_c(2,\mathbb{S}^2) = 4\pi$.